לינארית 2 תרגול 12

16 ביוני 2021

1 אופרטורים מיוחדים

אופרטור $T : V \to V$ נקרא:

שם	תכונה
נורמלי	$TT^* = T^*T$
צל"ע / הרמיטי	$T = T^*$
אוניטרי	$TT^* = T^*T = I$

הערה: מעל $\mathbb{R}$ קוראים לצל"ע סימטרי, כי $T^* = T^t$ ואז התכונה היא $T = T^t$.

תרגילים:

1. סיום משבוע שעבר. בשבוע שעבר ראינו אם $T : V \to W$ הע"ל, אז:

$$(Im(T))^{\perp} = \ker (T^*)$$

באופן שקול ניתן לומר:

$$Im(T) = (\ker T^*)^{\perp}$$

$$(Im(T^*))^{\perp} = \ker T$$

מסקנות:

(א) T על אמ"ם T^* חח"ע.

(ב) T חח"ע אמ"ם T^* על.

הוכחה: א. T על אמ"ם $Im(T) = W$ אמ"ם $\ker T^* = (Im(T))^{\perp} = W^{\perp} =$ $\{0\}$ אמ"ם T^* חח"ע. סעיף ב בעזרת כוכב כוכב.

2. הראו ש- $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ המוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + 2iw \\ 2z + (4 + 2i)w \end{pmatrix}$$

היא נורמלית. ממ"פ סטדרטית.

פתרון. כיון שאנחנו מעל הטנדרטית, נוכל לייצג את T בעזרת המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix} = [T]_B^B$$

כאשר $B = \{e_1, e_2\}$ כי אז פשוט:

$$Tv = Av$$

לכן צריך להוכיח:

$$AA^* = A^*A$$

ואכן:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

מה היה קורה אילו מדובר מעל מ"פ לא סטנדרטית?

היינו בוחרים B' או"נ, ומקבלים:

$$[T]_{B'}^{B'}[v]_{B'} = [Tv]_{B'}$$

$$[TT^*]_{B'}^{B'}[v]_{B'} = [T]_{B'}^{B'}[T^*]_{B'}^{B'}[v]_{B'} = [T]_{B'}^{B'}[T]_{B'}^{B'*}$$

ושוב קיבלנו להוכיח שיוויון כפל מטריצות.

3. יהי $T : V \to V$ אופרטור נורמלי. הוכיחו שאם $|\alpha| = |\beta| = 1$ אז $\alpha T + \beta T^*$ אופרטור נורמלי.

פתרון: ראשית:

$$(\alpha T + \beta T^*)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T$$

ולכן צריך להוכיח:

$$(\alpha T + \beta T^*)\left(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T\right) = \left(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T\right)(\alpha T + \beta T^*)$$

משמאל נקבל:

$$(\alpha T + \beta T^*)\left(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T\right) = |\alpha|^2 TT^* + \alpha\overline{\beta} T^2 + \beta\overline{\alpha}(T^*)^2 + |\beta|^2 T^*T =$$

$$= 2TT^* + \alpha\overline{\beta}T^2 + \beta\overline{\alpha}(T^*)^2$$

המעבר האחרון נובע מכך שנתון על T שהוא נורמלי, וכן ערך מוחלט 1 לסקלארים.
מימין:

$$\left(\overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}T\right)\left(\alpha T + \beta T^*\right) = |\alpha|^2 T^*T + \overline{\alpha}\beta(T^*)^2 + \alpha\overline{\beta}T^2 + |\beta|^2 TT^* =$$

$$= 2TT^* + \alpha\overline{\beta}T^2 + \beta\overline{\alpha}(T^*)^2$$

סיכום לאור הערות הסטודנטים: יש בתרגיל נתונים מיותרים: כדי לקבל שהאופטור $\alpha T + \beta T^*$ נורמלי מספיק אחד מהבאים:

(א) T נורמלי.

(ב) $|\alpha| = |\beta|$.

4. יהי V ממ"פ, ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$. נגדיר $T : V \to V$ ע"י

$$Tv = \alpha v$$

הוכיחו :

(א) T נורמלית לכל $\alpha \in \mathbb{C}$.

פתרון: נקבל $T^*v = \overline{\alpha}v$ (הסברים: אפשר להשתמש במשפט מההרצאה שאם α ע"ע עם ו"ע v של T, אז $\overline{\alpha}$ ע"ע עם אותו v של T^*. אפשרות נוספת: במקרה זה מתקריים $T = \alpha I$ כאשר I העתקת הזהות, ואז $T^* = (\alpha I)^* = \overline{\alpha}I^* = \overline{\alpha}I$).
ולכן:

$$T^*Tv = T^*(\alpha v) = \overline{\alpha}\alpha v = \alpha\overline{\alpha}v = TT^*v$$

$$\alpha\overline{\alpha}v = \alpha T^*v = (\overline{\alpha}T)^*v$$

(ב) T צל"ע אמ"ם $\alpha \in \mathbb{R}$.

פתרון: T צל"ע אמ"ם $T = T^*$ אמ"ם לכל v מתקיים $\alpha v = \overline{\alpha}v$ אמ"ם $\alpha = \overline{\alpha}$ אמ"ם $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ג) T אוניטרית אמ"ם $|\alpha| = 1$.

פתרון:

$$TT^*v = Iv = v \iff \forall v \in V : \alpha\overline{\alpha}v = v \iff |\alpha|^2 = 1 \iff |\alpha| = 1$$

5. יהי V ממ"פ, $T:V\to V$ אופרטור צל"ע, $S:V\to V$ אופרטור אוניטרי. הוכיחו: ST נורמלי אמ"ם $ST^2=T^2S$ (כלומר, האופרטור S מתחלף עם T^2).
פתרון: נראה מה זאת אומרת ST נורמלי:

$$ST(ST)^*=STT^*S^*=ST^2S^*$$

$$(ST)^*ST=T^*S^*ST=T^2$$

ולכן: ST נורמלי אמ"ם $T^2=ST^2S^*$ אמ"ם (הכפלת S מימין, שכיון שהוא הפיך אז אכן המעבר הוא אמ"ם) $T^2S=ST^2S^*S=ST^2$.
הערה: באופן כללי אם נתון $A=B$ אז לכל S מתקיים $AS=BS$, אבל הכיוון ההפוך עובד רק כאשר S הפיך.

6. הוכיחו את השלישי חינם של שלושת התנאים הבאים על $T:V\to V$:

   (א) T אוניטרית

   (ב) T צל"ע

   (ג) $T^2=I$

   פתרון: א+ב גורר ג:

$$T^2=TT^*=I$$

   מעבר ראשון נובע מצל"ע, שני מאוניטריות.
   א+ג גורר ב: אוניטרית אומר $TT^*=I$ כלומר, $T^{-1}=T^*$. מאידך, ג אומר $T^2=I$ כלומר, $T^{-1}=T$. ולכן $T^*=T^{-1}=T$ (הערה: יכולנו לרשום צT^{-1}1 מכיון שהיא אוניטרית ולכן הפיכה).
   ב+ג גורר א:

$$TT^*=T^2=I$$

   כאשר מעבר ראשון נובע מצל"ע ושני מנתון ג.

7. תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית. הוכיחו: כל הע"ע שלה $|\lambda|=1$
פתרון: תרגיל זה משתמש בכך שמטריצה אוניטרית שומרת על המכפלה הפנימית כלומר.

$$\langle v,u\rangle=\langle Av,Au\rangle$$

ובפרט שומרת נורמה:

$$\|v\|=\|Av\|$$

לכן אצלנו: יהי λ ע"ע עם ו"ע v. כיון שכל כפל בסקלאר של v הוא גם ו"ע, נוכל לקחת את $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|}v$, ואז $A\hat{v} = \lambda\hat{v}$ ונקבל:

$$1 = \|\hat{v}\| = \|A\hat{v}\| = \|\lambda\hat{v}\| = |\lambda| \cdot \|\hat{v}\| = |\lambda|$$