לינארית 2 - מועד א'

מרצה: תמר בר־און.
מתרגל: אחיה בר־און.
עליכם לענות על כל השאלות.
משקל כל שאלה 27 נקודות.
משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. קבעו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה לכסינה:

$$A(a) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

עבור $a = 3$, מצאו P הפיכה ו־D אלכסונית כך ש־$P^{-1}A(3)P = D$.

פתרון:

ראשית, נשים לב שהערכים העצמיים של המטריצה הם $-2, a, a^2$.

עבור $a \neq 0, 1, -2$ ניתן לראות כי למטריצה יש 3 ע"ע שונים ולכן היא לכסינה.

נבדוק מה קורה עבור הערכים הבעייתיים.

עבור $a = 0$:

$$A(0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה 1 ולכן הר"ג של 0 הוא 2. כמו כן, הר"ג של ־2 הוא 1, ולכן $A(0)$ לכסינה.

עבור $a = 1$:

$$A(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שהר"ג של 1 הוא 2, הר"ג של ־2 הוא 1, ולכן המטריצה לכסינה.

עבור $a=-2$:

$$A(-1)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

הר"א של -2 הוא 2, ואילו הר"ג הוא 1, ולכן המטריצה אינה לכסינה.

לסיכום: המטריצה לכסינה לכל $a \neq -2$, ואינה לכסינה עבור $a=-2$.

כאשר $a=3$, המטריצה האלכסונית הדומה היא $D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

נחשב ו"ע.

עבור $\lambda=-2$: $V_{-2}=N(A(3)+2I)=N\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

עבור $\lambda=3$: $V_3=N(A(3)-3I)=N\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

עבור $\lambda=9$: $V_9=N(A(3)-9I)=N\begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}\}$

לכן נקח $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

2. נגדיר מ"פ חדשה על $\mathbb{R}^2$:

$$\langle\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\rangle=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו שזאת אכן מ"פ.

פתרון:

נוכיח שהמטריצה האמצעית חיובית לחלוטין. היא סימטרית. בנוסף, הע"ע שלה הם $3\pm\sqrt{8}$ שהם חיוביים.

למדנו בהרצאה שמטריצה חיובית לחלוטין יוצרת מכפלה פנימית.

(ב) מצאו בסיס או"נ ל$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הנתונה.

פתרון:

נפעיל גראם שמידט על $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$\tilde{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{|| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ||^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולבסוף ננרמל: (נשים לב שהוקטורים כבר מנורמלים)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ג) חשבו את $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}^{\perp}$ עבור המ"פ הנתונה.

פתרון:

נפתור את המשוואה:

$$\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = 0$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$3x + 8y = 0$$

ולכן הניצב הוא: $span\{\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

.3

(א) תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה, כך שקיימים $0 \neq k \in \mathbb{N}$ ו $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ כך ש $A^k = \alpha I$. הוכיחו שA לכסינה.

הוכחה:

A מאפסת את הפולינום $p(x) = x^k - \alpha$. ידוע שיש לו k שורשים שונים, כי לכל מספר מרוכב שונה מ0 יש k שורשים שונים מסדר k. כלומר, הפולינום המל"ל. הפ"מ של A מחלק אותו ולכן גם הוא מל"ל. לכן A לכסינה.

(ב) יהי V ממ"פ ממימד סופי. הוכיחו/הפריכו: אם

$$V = W_1 \oplus W_2$$

אז

$$V = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$$

הוכחה:

מהנתון ניתן להסיק שני דברים: $W_1 + W_2 = V, W_1 \cap W_2 = 0$.
מתרגיל שהיה בתרגול נקבל:

$$0 = V^{\perp} = (W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$$

$$V = 0^{\perp} = (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$$

מסקנה: $V = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$.

4. יהא $(V, \langle\rangle)$ ממ"פ ו יהא $W \leq V$ ת"מ. נסמן ב$\pi_W(v)$ את ההטלה (הניצבת) של v על W.

(א) הוכיחו כי לכל $w \in W$ ולכן $v \in V$ מתקיים כי $\langle w, \pi_W(v)\rangle = \langle w, v\rangle$
פתרון: יהיו v, w נתונים. אזי לפי משפט הפירוק הניצב קיים $w_1 \in W, w_2 \in W^{\perp}$ כך ש $v = w_1 + w_2$ ואז לפי הגדרה

$$\langle w, v\rangle = \langle w, w_1 + w_2\rangle = \langle w, w_1\rangle + \langle w, w_2\rangle = \langle w, w_1\rangle = \langle w, \pi_W(v)\rangle$$

(ב) יהא $T : V \to V$ אופרטור כך ש W הוא T־אינוואראנטי. נגדיר

$$T|_W : W \to W$$

את הצמצום של T ל W. הוכיחו כי

$$(T|_W)^* : W \to W$$

היא

$$(T|_W)^* = \pi_W \circ T^*$$

פתרון:
יהיו $w_1, w_2 \in W$

$$\langle T|_W(w_1), w_2\rangle = \langle T(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, T^* w_2\rangle = \langle w_1, \pi_W(T^*(w_2))\rangle$$

(המעבר האחרון נובע מסעיף א')
לכן $(T|_W)^* = \pi_W \circ T^*$

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $T : V \to V$ הוא אופרטור נורמלי , וW הוא תת מרחב T־ אינוואריאנטי, אז

$$T|_W : W \to W$$

הוא אופרטור נורמלי

הוכחה:

כידוע, העתקה היא נורמלית אמ"ם היא לכסינה אוניטרית. לכן T לכסינה אוניטרית.

הוכחנו בהרצאה שאם העתקה כלשהי $S : V \to V$ היא לכסינה, ו$U \leq V$ הוא תת מרחב S אינוואריאנטי, אז $S|_U : U \to U$ היא גם לכסינה. לכן $T|_W$ לכסינה. נותר להראות שהיא לכסינה אוניטרית, ומכיוון שלכל מ"ע אפשר לקחת בסיס או"נ, אז מספיק להוכיח שו"ע של $T|_W$ שמתאימים לע" שונים הם מאונכים. כלומר, אם $\lambda_i \neq \lambda_j$ ע"ע של $T|_W$ וw_i, w_j ו"ע שלהם בהתאמה, אז $\langle w_i, w_j \rangle = 0$. ובכן, w_i, w_j הם גם ו"ע של T עם אותם ע"ע (כי לכל $w \in W$, $T|_W(w) = T(w)$), וT נורמלית. הוכחנו בהרצאה שו"ע של ע"ע שונים של אופרטור נורמלי הם מאונכים, ולכן w_i, w_j מאונכים. לסיכום, $T|_W$ לכסינה אוניטרית, ועל כן נורמלית.