<u>תרגיל מספר 9</u>

<u>הגשה</u> : לא יאוחר מה-9.2.2012 לתא המתרגל.

<u>שאלה 1:</u>

א. הוכיחו כי חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים היא תת-חבורה נורמלית של חבורת האוטומורפיזמים.

ב. יהיו G ו- H חבורות מסדרים זרים. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}(G \times H) \cong \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(H)$. תנו דוגמא נגדית לטענה זו, כשהסדרים אינם זרים.

<u>שאלה 2:</u>

תהי G חבורה ציקלית מסדר p^r (p ראשוני) . הראו כי G אינה יכולה להיות מהצורה $G = H_1H_2$ באשר H_1, H_2 תת- חבורות של G כך ש $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ ו- $H_1 \neq \{1\}$, $H_2 \neq \{1\}$.

$\{1\}$: החבורה הטריוויאלית המכילה רק את איבר היחידה).

<u>שאלה 3:</u>

א. פרטו את כל החבורות האבליות מסדר 240 ואקספוננט 18.

ב. מצאו כמה איברים יש מכל סדר בחבורה $Z_2 \times Z_6 \times Z_{30}$.

<u>שאלה 4 (*) :</u>

מנו את האוטומורפיזמים של החבורה $Z_2 \times Z_8$.

<u>שאלה 5:</u>

א. כמה חבורות קומוטטיביות שונות (עד כדי איזומורפיזם) קיימות מסדר 4320? פרטו והציגו בנוסף לכל מקרה את ההצגה שלו בצורה $Z_{\{d_1\}} x \ \dots \ x\, Z_{\{d_t\}}$ כאשר $d_1|d_2| \dots |d_t$.

ב. רשמו את החבורה U_{30} כמכפלה ישרה של חבורות ציקליות .

<u>שאלה 6 :</u>

<u>תזכורת:</u> תת- חבורה כפלית סופית של שדה היא ציקלית.

א. האם החבורות $\mathbb{Z}_{25}$ ו- $\mathbb{F}_{25}\backslash\{0\}$ ($\mathbb{F}_{25}$ = השדה בן 25 איברים) איזומורפיות?

ב. בנו שדה מסדר 27 כמנה של קבוצת הפולינומים במשתנה אחד מעל השדה המתאים .

<u>שאלה 7:</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א.הפולינום x^4+1 פריק מעל $\mathbb{Z}_5$.

ב. יהי $\mathbb{F}_9$ השדה עם 9 איברים. מתקיים $(\mathbb{F}_9\backslash\{0\},\cdot) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

<u>שאלה 8:</u>

א. הראו כי הפולינום x^2-2 אי-פריק מעל $\mathbb{Z}_5$.

ב. הוכיחו כי בשדה $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2-2\rangle$ קיים איבר a המקיים את המשוואה $a^2+a+1=0$.