תרגול כיתה 4 - פונקציות מדידות

הגדרנו בהרצאה כי אם $\left(X,S\right)$ הינו מרחב מדיד אז $f:X\to\mathbb{R}^*$ הינה מדידה אם מתקיים:

$$\left\{x\in X : f\left(x\right)\le\alpha\right\}\in S \quad \alpha\in\mathbb{R} \text{ לכל}$$

1. שאלה: האם הפונקציה הבאה הינה מדידה בורל?

$$T\left(x\right)=\begin{cases}\sin 2x & x>0\\ 1+\cos x & x\le 0\end{cases}$$

פתרון: נגדיר את הפונקציות

$f\left(x\right)=I_{(0,\infty)}\left(x\right)$ ואת $h\left(x\right)=I_{(-\infty,0]}\left(x\right)$. אלו פונקציות מדידות שכן הקטעים $\left(0,\infty\right)$ $\left(-\infty,0\right]$ הינם מדידים בורל. ראינו בהרצאה כי מכפלה של פונקציות מדידות הינה מדידה ולכן נקבל

$$T\left(x\right)=\left(\sin 2x\right)I_{(0,\infty)}\left(x\right)+\left(1+\cos x\right)I_{(-\infty,0]}\left(x\right)$$

הינה מדידה בורל.

הערה: ניתן להכליל את מושג המדידות עבור הפונקציה $f:E\to\mathbb{R}^*$ באופן הבא: אם $E\in S$ אז הפונקציה $f:E\to\mathbb{R}^*$ תקראה מדידה אם

$$\left\{x\in E : f\left(x\right)\le\alpha\right\}\in S$$

2. תרגיל: תהי f פונקציה בעלת תחום מדיד D. הראה כי f מדידה אמ"מ הפונקציה g המוגדרת על $\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ לכל $x\in D$ ו $g\left(x\right)=0$ עבור $x\notin D$ מדידה.

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי f מדידה. אם $\alpha>0$, אזי $\left\{x : g\left(x\right)\ge\alpha\right\}=\left\{x : f\left(x\right)\ge\alpha\right\}$ וזו קבוצה מדידה. אם $\alpha\le 0$, אזי $\left\{x : g\left(x\right)\ge\alpha\right\}=\left\{x : f\left(x\right)\ge\alpha\right\}\bigcup D^c$ שגם היא מדידה. לכן g מדידה.

$\Rightarrow$: נניח g מדידה. אזי $\left\{x : f\left(x\right)\ge\alpha\right\}=\left\{x : g\left(x\right)\ge\alpha\right\}\cap D$ ומכיוון ש D מדידה אז f מדידה.

3. ראינו בהרצאה כי פונקציה f מדידה S הינה פונקציה המקיימת $\{x \mid f(x) \le \alpha\} \in S$ עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$. הראו כי הגדרה שקולה הינה : פונקציה f מדידה S הינה פונקציה המקיימת $f^{-1}(A) \in S$ לכל קבוצה A מדידה בורל.

פתרון: ברור כי ההגדרה השניה גוררת את ההגדרה הראשונה. כעת נוכיח כי ההגדרה הראשונה גוררת את השניה. נניח כי S הינה סיגמא אלגברה מעל X . נראה כי קבוצת כל הקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימות $f^{-1}(A) \in S$ הינה סיגמא אלגברה. נסמן קבוצה זו ב $\mathcal{B}$.

i. $f^{-1}(\mathbb{R}) = X \in S \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{B}$

ii. אם $f^{-1}(A) \in S$, כלומר $A \in \mathcal{B}$ אז $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c \in S$ ולכן $A^c \in \mathcal{B}$.

iii. אם $f^{-1}(A_n) \in S$, כלומר $A_n \in \mathcal{B}$, אזי $f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(A_n) \in S$, כלומר $\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}$. מכאן כי $\mathcal{B}$ הינה סיגמא אלגברה.

כעת, עפ"י ההגדרה הראשונה ברור כי $(-\infty, \alpha] \in \mathcal{B}$ עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$. מכאן ש $\mathcal{B}$ הינה סיגמא אלגברה המכילה את הקטעים מהצורה $(-\infty, \alpha]$ ולכן מכילה את כל הקבוצות המדידות בורל.

4. תהי E משפחה של תת קבוצות ב X ו $A \subseteq X$, אזי נגדיר $A \cap E = \{A \cap B \mid B \in E\}$. יהי (X, ρ) מרחב מטרי עם טופולוגיה T וסיגמא אלגברה בורל S ותהי $A \subseteq X$. הראו כי ל (A, ρ) יש טופולוגיה $T_A = A \cap T$ ו סיגמא אלגברה בורל $S_A = S \cap A$.

פתרון: עפ"י ההגדרה של טופולוגיה מושרית ברור כי $T_A = A \cap T$. השיכון הטבעי $I_A : A \to X$ הינו רציף ולכן נותר להראות כי $S_A = S \cap A$.

$S_A \supseteq S \cap A$: השיכון הטבעי $I_A : A \to X$ הינו רציף ולכן מדיד. מכאן ש $S \cap A = I_A^{-1} S \subseteq S_A$.

$S_A \subseteq S \cap A$: $S_A = \sigma(T_A) = \sigma(A \cap T) \subseteq \sigma(A \cap S) = A \cap S$.

השוויון האחרון נובע מכך שהראנו כי $S \cap A$ הינה סיגמא אלגברה.

5. יהי (X, S) מרחב מדיד ויהיו $f : X \to \mathbb{R}$ ו $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות לבג ובורל בהתאמה. הראו כי $h = g \circ f$ מדידה לבג.

פתרון: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה בורל, אזי $h^{-1}(A)=f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$. מכיוון ש g מדידה בורל נובע כי $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. מכיוון ש f מדידה לבג נובע כי $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ מדידה לבג ומכאן ש h מדידה לבג.

6. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב -1 ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:

i. $\alpha\in f(\mathbb{R})$: אזי מהמונוטוניות של f נקבל כי $\{x\mid f(x)\geq\alpha\}=[f^{-1}(\alpha),\infty)$.

ii. $\alpha\notin f(\mathbb{R})$: נגדיר את β להיות $\beta=\inf\{f(x)\mid f(x)>\alpha\}$. אזי

א. $\beta\in\{f(x)\mid f(x)>\alpha\}$: אזי $\{x\mid f(x)\geq\alpha\}=[f^{-1}(\beta),\infty)$.

ב. $\beta\notin\{f(x)\mid f(x)>\alpha\}$: אזי $\{x\mid f(x)\geq\alpha\}=(f^{-1}(\beta),\infty)$.

בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה.

פונקציות אלמנטריות הן מהצורה:

$$I_E=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

וראינו כי פונקציה אלמנטרית זו מדידה אמ"מ $E\in S$.

פונקציות פשוטות מדידות הן מהצורה:

$$\sum_{i=1}^{n}a_k I_{E_k}(x)$$

כאשר a_k הינם סקלרים ו E_k הינן קבוצות מדידות. ראינו גם כי לכל פונקציה פשוטה יש הצגה קנונית:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}a_k I_{E_k}(x)$$

כאשר לכל k $E_k=\left\{x\in X:\varphi(x)=a_k\right\}$ כאשר כל ה a_k שונים.

.7

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\{x \in U : f \text{ is continuous at x}\}$ היא מטיפוס G_δ.

פתרון:

לכל $x \in U, \delta > 0$ נגדיר את התנודה ("oscillation") של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י $\omega(x,\delta) := \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x,\delta)\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x) := \inf\{\omega(x,\delta) : \delta > 0\}$.

אנו טוענים שלכל a ממשי הקבוצה $E_a = \{x : \omega(x) < a\}$ היא פתוחה.

הוכחת הטענה:

יהי $x_0 \in E_a$, ישנה $\delta_0 > 0$ כך ש- $\omega(x_0,\delta_0) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$

(אחרת ה-inf של כולם לא היה קטן מ-a). לכן לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$,

$$\omega\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right) = \sup\left\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right)\right\} \le \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$$

ומכאן כ-inf, $\omega(x) < a$ לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$, והטענה הוכחה.

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x או"א $\omega(x) = 0$ (אין תנודה בנקודה x) ולכן:

$\{x : f \text{ is continuous at x}\} = \{x : \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : \omega(x) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$. הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ כולן פתוחות, ולכן הקבוצה המדוברת היא באמת מטיפוס G_δ. מש"ל.

הערה:

ניתן להוכיח שזה נכון בכל מרחב מטרי.