<u>פיתרון לתרגיל מספר 8 :</u>

<u>תשובה 1:</u>

יהיו $H,K<G$ חבורות סופיות. נגדיר העתקה

$$H\times K\to HK$$

ע"י $(h,k)\mapsto hk$.

אזי לכל $g\in HK$ קיימים בדיוק $|H\cap K|$ זוגות $(h,k)\in H\times K$ כך ש $hk=g$.

אכן, יהי $(h,k)\in H\times K$ כך ש $hk=g$. אזי, לכל $a\in H\cap K$, $(ha,a^{-1}k)\in H\times K$ מקים $(ha)(a^{-1}k)=hk=g$. להיפך, אם $(h_1,k_1)\in H\times K$ מקים $h_1k_1=g=hk$, אז $a:=h^{-1}h_1=kk_1^{-1}\in H\cap K$ ו $h_1=ha$, $k_1=a^{-1}k$.

מכאן $|HK|=\frac{|H\times K|}{|H\cap K|}=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}$.

<u>תשובה 2:</u>

יהיו G קומוטטיבית ו G/H ציקלית אינסופית. יהי Ha יוצר של G/H ותהי $K=\langle a\rangle$. אם $g\in G$, אז $Hg\in\langle Ha\rangle$ ולכן קים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש $Hg=Ha^n$. מכאן קים $h\in H$ כך ש $g=ha^n$. לכן $G=HK$. אם $a^m\in H\cap K$ עבור $m\neq 0$, אז $(Ha)^m=Ha^m=H$, בסתירה לכך ש $G/H=\langle Ha\rangle$ היא ציקלית אינסופית. לכן $H\cap K=\{1\}$. מכאן, כיון ש G קומוטטיבית, G היא מכפלה ישרה פנימית של H,K.

<u>תשובה 3:</u>

תהי $G=H\times K$, באשר H ציקלית מסדר p^2 ו K ציקלית מסדר p^3. אבר $(h,k)\in H\times K$ הוא מסדר p^2 אם"ם $(h,k)\neq(1,1)$, $(h^p,k^p)\neq(1,1)$ ו $(h^{p^2},k^{p^2})=(1,1)$. לכן (h,k) הוא מסדר p^2 אם"ם $|h|=p^2$ ו $|k|\le p^2$ או $|k|=p^2$ ו $|h|<p^2$. כיון ש H היא ציקלית מסדר p^2, יש לה רק חבורה חלקית אחת מסדר p ולכן יש בה p אברים מסדר $\le p$ ו p^2-p אברים מסדר p^2. באפן דומה, כיון ש K היא ציקלית מסדר p^3, יש לה רק חבורה חלקית אחת מסדר p ורק חבורה חלקית אחת מסדר p^2 ולכן יש בה p^2 אברים מסדר $\le p^2$ ו p^2-p אברים מסדר p^2. מכאן מספר האברים ב G מסדר p^2 הוא

$$(p^2-p)\cdot p^2+(p^2-p)\cdot p=(p^2-p)(p^2+p)=p^4-p^2.$$

זהו גם מספר האברים מסדר p^2 בכל החבורות החלקיות של G שהן ציקליות מסדר p^2. בכל חבורה ציקלית מסדר p^2 יש p^2-p אברים מסדר p^2 וחתוך של שתיים כאלו הוא חבורה חלקית מסדר $\le p$. לכן ל G יש $\frac{(p^2-p)(p^2+p)}{p^2-p}=p^2+p$ חבורות חלקיות ציקליות מסדר p^2.

<u>תשובה 4:</u>

יהי p מספר ראשוני. אנו נוכיח באינדוקציה על n שאם G היא חבורה מסדר p^n, אז קימות לה חבורות חלקיות $G_1,\ldots,G_{n-1}$ כך ש $G_1 < G_2 < \ldots < G_{n-1} < G$, $G_i \lhd G$ ו $|G_i| = p^i$, $i = 1,\ldots,n-1$.

$Z(G) \neq \{1\}$ ולכן יש לה אבר a מסדר p. נסמן $G_1 = \langle a \rangle$. אזי $|G_1| = p$.

כמו־כן, כיון ש $G_1 < Z(G)$, $xG_1 = G_1x$ לכל $x \in G$ ולכן $G_1 \lhd G$. נעבור לחבורת המנה G/G_1 שהיא מסדר $\frac{p^n}{p} = p^{n-1}$. אזי מהנחת האינדוקציה נובע שקימות ל G/G_1 חבורות חלקיות $G_2/G_1,\ldots,G_{n-1}/G_1$ המקימות $G_i/G_1 < G_{i+1}/G_1$, $G_i/G_1 \lhd G/G_1$ ו $|G_i/G_1| = p^{i-1}$. מכאן $G_1,G_2,\ldots,G_{n-1}$ הן חבורות חלקיות של G המקימות $G_i < G_{i+1}$, $G_i \lhd G$ ו $|G_i| = p^i$.

$H = \{a \in G \mid Ka \in L\} < G$ מקימת $L = H/K$. אם בנוסף $L \lhd G/K$, אז $H \lhd G$.

<u>תשובה 5:</u>

א) קל ונובע מההגדרה.

ב) ברור ש- H מוכל במנרמל שלו. צ"ל שלכל $a \in N(H)$ מתקיים: $aH=Ha$ אבל זה נכון על פי הגדרת המנרמל.

ג) אם H תח"ג של K אז לכל $k \in K$: $kH=Hk$ ולכן K מוכל ב- $N(H)$. K היא חבורה בפני עצמה, ולכן היא ת"ח של $N(H)$.

ד) (1) ההוכחה ש-H היא ת"ח קלה. מכיוון שהיא לא משפיעה על 2,4,6 ניתן להסתכל עליה כעל חבורות התמורות של $\{1,3,5\}$ ולכן היא איזומורפית ל- S_3. היא לא נורמלית ב- S_6: התמורה
$(1\ 3\ 5) \in H$ אך התמורה הצמודה לה: $(1\ 2\ 4)$ אינה שייכת ל-H (זכרו שת"ח היא נורמלית בחבורת התמורות אם היא מכילה את כל התמורות בעלות אותו מבנה).

(2) ת"ח אחת ב- $N(H)$ האיזומורפית ל- S_3 היא H עצמה (ע"פ סעיף ב)).
נסתכל על $M = \{\sigma \in S_6 : \sigma(1) = 1,\ \sigma(3) = 3,\ \sigma(5) = 5\}$. אזי $M \cap H = \{e\}$ ו-M איזומורפית ל- S_3. מכיוון שכל תמורה ב-M (חוץ מה- id) זרה לכל תמורה ב-H אז לכל $m \in M$ מתקיים $mH=Hm$ ולכן M מוכל במנרמל של $N(H)$.

<u>תשובה 6:</u>

המטריצה $x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ יוצרת את תת החבורה $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \mathbb{Z}_5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ והיא כמובן מסדר 5.

המטריצה $y = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ יוצרת את תת החבורה $\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}_5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ והיא מסדר 5.

נשים לב ש- G היא חבורה לא אבלית מסדר 53 וניתן להוכיח ש- $|Z(G)|=5$ (מנוסחאת המחלקה נובע ש $|Z(G)|\neq 1$
כמו כן, אם $|Z(G)| = 5^2$ נקבל ש G אבלית כי מרחב המנה $G/Z(G)$ הוא ציקלי)

המטריצה $z = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ יוצרת את תת החבורה, היא מסדר 5 והיא יוצרת המרכז $\begin{pmatrix}1 & 0 & \mathbb{Z}_5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

רואים בקלות שכ"א מהאיברים פורש את הכניסה המתאימה לו המטריצה ו-

$$z^{k1}x^{k2}y^{k3} = \begin{pmatrix}1 & k3 & k1\\ 0 & 1 & k2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{כאשר} \quad k1, k2, k3 \in \mathbb{Z}_5$$

<u>תשובה 7:</u>

א) $K = \{1, \tau\sigma\}, H = \{1, \tau\sigma, \sigma^2, \tau\sigma^3\}$ מקיימות ש H ת"ח נורמלית ב-$D4$, K ת"ח נורמלית ב-H כי $[D_4 : H] = [H : K] = 2$, אבל K אינה נורמלית ב D_4 שכן $\tau(\tau\sigma)\tau^{-1} = \tau^2\sigma\tau = \sigma\tau \notin K$.

<u>תשובה 8:</u>

$Z(N)$ היא ת"ח של N ולכן ת"ח של G. יהי $g\in G$, $z\in Z(N)$. צ"ל $gzg^{-1} \in Z(N)$. ז"א, עבור $n\in N$ כלשהו, צריך להוכיח ש- $gzg^{-1} * n = n * gzg^{-1}$.
נשים לב ש- $gzg^{-1} \in gNg^{-1} = N$.
עתה – $gzg^{-1} * n = g\left(z * g^{(-1)}ng\right)g^{-1} = g(g^{-1}ng * z)g^{-1} = n * (gzg^{-1})$

תשובה 9:

א) לא נכון. תהי $G=D4$, $A = \langle\sigma\rangle$, $B=Z(D4)$. אז A איזומורפית ל- $Z4$ ו- G/A איזומורפית ל-$Z2$ (כי זו חבורה מסדר 2). B איזומורפית ל- $Z2$ ו- G/B איזומורפית ל- $Z2\times Z2$.

ב) נכון. נתון x = gyg-1 . רעיון ההוכחה הוא שאם xn=1 אז (gyg-1)n = gyng-1 = 1 או yn=1 וההפך.

ג) לא נכון. ב- $Z4$ לאיברים $1,3$ יש אותו סדר (שניהם יוצרים) אבל הם אינם צמודים (כי $Z4$ אבלית).

ד) לא נכון. נשים לב שאם $x \in N(H)$ אז לא בהכרח $x \in H$. למשל, עבור $H=\langle(1\ 2)\rangle$ ב- $S5$, אז $x = (3\ 4\ 5) \in N(H)$ (למה?) ו- $|x|=3,\ |H|=2$.

ה) חס וחלילה. ל $A4$ יש שמונה איברים מסדר 3 ושלושה מסדר 2 ואילו ב $D6$ יש איבר מסדר 6 (סיבוב).