תורת הקבוצות — תרגיל בית 8

חיים שרגא רוזנר

כ' בסיון, תשע"ה*

תקציר

קבוצות סדורות היטב, הצגה נורמלית של קנטור, פונקציות מחלקה.

תזכורות רנדומליות

1. כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית סדר לסודר יחיד.
2. טריכוטומיות סודרים: מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ או $\beta < \alpha$.
3. משפט נקודת השבת: תהי $f\colon ON \to ON$ פונקציית סודרים מונוטונית (במובן החזק) ורציפה. אזי יש אינסוף סודרים α עבורם $f\left(\alpha\right) = \alpha$. יתרה מזאת, מחלקת הסודרים שהם נקודות שבת של f איננה חסומה במחלקת הסודרים ON.
4. ההצגה הנורמלית של קנטור: יהי $\alpha > 0$ סודר. אזי קיימים $n \in \omega$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ו־$k_1, k_2, \ldots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$ יחידים כך ש
$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \omega^{\beta_2} k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n$$
5. חילוק סודרים עם שארית: לכל α, β כך ש־$\beta > 0$ קיימים ויחידים γ, δ כך ש־$\delta < \beta$ ו־$\alpha = \beta\gamma + \delta$.
6. אקסיומת ההחלפה: תהי A קבוצה, ותהי $\varphi\left(x, y\right)$ נוסחה, אשר היא כלל התאמה חד־ערכי על איברי A. לשון אחר, לכל $x \in A$ קיים ויחיד y כך ש־$\varphi\left(x, y\right)$. אזי האוסף $\{y\colon \exists x \in A, \varphi\left(x, y\right)\}$ של תמונת φ הוא קבוצה.

1 תרגילים

1. לכל שתי קבוצות סדורות היטב, מתקיים אחד מהשניים: הן איזומורפיות, או אחת מהן איזומורפית לרישא־ממש של השניה. היעזרו בתזכורות.
2. נגדיר ברקורסיה על הטבעיים את הסדרות הבאות:

* להגשה עד יום **ראשון** ד' בתמוז (21 יונ') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

- $\alpha_0 = \beta_0 = \omega$.
- $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$. $\beta_{n+1} = \beta_n^{\omega}$.

(א) חשבו את $\sup\left\{\beta_n : n \in \omega\right\}$.

(ב) מסמנים $\epsilon = \sup\left\{\alpha_n : n \in \omega\right\}$. מי מהגבולות יותר גדול?

(ג) הוכיחו כי ϵ הוא הסודר α הראשון המקיים $\omega^{\alpha} = \alpha$.

(ד) האם $\sup\left\{\beta_n : n \in \omega\right\}$ הוא הסודר הראשון β המקיים $\beta = \beta^{\omega}$? מדוע?

3. יהי $\alpha > 0$ סודר. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) לכל $\beta, \gamma < \alpha$, גם $\beta + \gamma < \alpha$.

(ב) לכל $\beta < \alpha$, מתקיים $\beta + \alpha = \alpha$.

(ג) לכל $A \subseteq \alpha$, מתקיים $\mathrm{type}\left(A, \in\right) = \alpha$ או $\mathrm{type}\left(\alpha \setminus A, \in\right) = \alpha$.

(ד) קיים סודר δ עבורו $\alpha = \omega^{\delta}$.

סודר α המקיים תכונות אלו נקרא סודר אי־פריק (indecomposable). הוכיחו לפחות שלוש מהגרירות שבטענה.

4. מצאו דוגמא לסודר α ותת־קבוצה ממש לא ריקה A עבורם:

(א) $\mathrm{type}\left(A, \in\right) + \mathrm{type}\left(\alpha \setminus A, \in\right) > \alpha$.

(ב) $\mathrm{type}\left(A, \in\right) + \mathrm{type}\left(\alpha \setminus A, \in\right) = \alpha$.

(ג) $\mathrm{type}\left(A, \in\right) + \mathrm{type}\left(\alpha \setminus A, \in\right) < \alpha$.

5. הוכיחו או הפריכו:

(א) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\sigma\omega$ כאשר σ הוא סודר.

(ב) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\omega\sigma$ כאשר σ הוא סודר.

(ג) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\omega + \sigma$ כאשר σ הוא סודר.

(ד) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\sigma + \omega$ כאשר σ הוא סודר.

(ה) קיימים סודרים שונים α, β המקיימים $\bigcup \alpha = \bigcup \beta$.

6. תהי $F \colon A \to B$ פונקציית מחלקה חח"ע (דהיינו נוסחא דו־מקומית חד־חד־ערכית בין קבוצות המקיימות A לקבוצות המקיימות B). הוכיחו כי A מחלקה של ממש א.ס.ס. $\mathrm{im}\left(F\right)$ מחלקה של ממש.

ב ה צ ל ח ה!