

אינפי 1 – תרגיל 5

1. תהי  $\{b_n\}$  סדרה יורדת. הוכח ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$
2. תהי  $\{a_n\}$  סדרה המתכנסת ל  $L > 0$ . הוכח ש  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \sqrt{L}$
3. הוכח/הפוך:  $\{a_n\}$  מתכנסת  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$
4. תהי  $\{a_n\}$  סדרה המקיימת  $|a_n| \leq 2$  וגם  $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{5} |a_n^2 - a_{n-1}^2|$ . הוכח שהסדרה מתכנסת.
5. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ , ונתון  $a_1 = c > 0$ 
  - a. עבור אילו ערכי  $c$  הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?
  - b. עבור אילו ערכי  $c$  הסדרה מתכנסת?
  - c. מה גבול הסדרה עבור ערכי  $c$  מהסעיף הקודם?
6. תהי  $\{a_n\}$  סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$  ונתון  $a_1 > 0, c > 0$ 
  - a. עבור אילו ערכים של  $a_1$  הסדרה מונוטונית עולה? יורדת? (רמז: נניח  $x$  מקיים  $x = \sqrt{c + x}$ , מה קורה כאשר  $a_n < x$ ?)
  - b. עבור הערכים שמצאת בסעיף הקודם, האם הסדרה מתכנסת?
  - c. מה גבול הסדרה כאשר היא מתכנסת? האם יכולת לענות על סעיף זה לפני הסעיפים הקודמים?
7. מצא את כל הפתרונות של המשוואה  $x = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + x}}}$  (רמז: תתי סדרות של סדרה מתכנסת שואפים לגבול שלה)
8. תהי  $\{a_n\}$  סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  ונתון  $a_1 > 0$ . הוכח ש  $\{a_n\}$  אינה חסומה. (רמז: הראה שהיא מונוטונית קודם כל).
9. תהי  $\{a_n\}$  סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n n!} \right)$  ו  $a_1 = 13$ . הוכח כי הסדרה מתכנסת.