תרגול 3-אושרית

חיתוכים ואיחודים אינסופיים,קבוצת החזקה, מכפלה קרטזית

הכללה לאיחוד וחיתוך כלשהם:

מוטיבציה: הגדרנו פעולות של חיתוך ואיחוד של 2 קב' ולפעמים נרצה להגדיר חיתוך ואיחוד של יותר מ-2 קב', לדוג' - 17 קב' או אינ' סופי של קב'. לשם כך - נגדיר:

הגד': תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קב' כאשר I קב' אינדקסים. אזי נגדיר את האיחוד והחיתוך של הקב'.

(1) $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i\in I : x\in A_i\}$

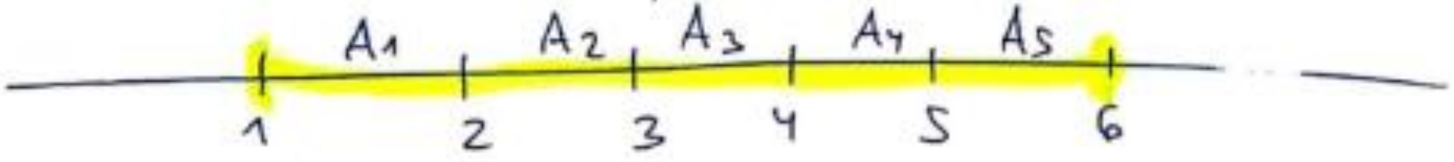
(2) $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i\in I : x\in A_i\}$

דוג': נגדיר $A_n := [n, n+1]$

חשבו את: (1) $\bigcup_{n=1}^{5} A_n$ (2) $\bigcap_{n=1}^{5} A_n$ (3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (4) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

פתרון: (1) דוגמא- נתחיל לסמן את האיברים שמשתתפים באיחוד כדי שיהיה לנו נוח.

$A_1 = [1,2]$ $A_2 = [2,3]$ $A_3 = [3,4]$ $A_4 = [4,5]$ $A_5 = [5,6]$



המשך תרגיל:

1. המשך ← $\boxed{\bigcup_{n=1}^{5} A_n = [1,6]}$

2. נשים ♡ כי $\underset{[1,2]}{A_1} \cap \underset{[5,6]}{A_5} = \emptyset$ ולכן - ברור כי $\bigcap_{n=1}^{5} A_n = \emptyset$

3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [1,\infty)$ הוכחה- ~~[illegible]~~. נראה הכלה דו כיוונית.

($\subseteq$) ← יהי $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ וצ"ל - $x\in[1,\infty)$ לפי הגד' איחוד נקבל כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $x\in[n,n+1]$

ברור כי- $[n,n+1]\subseteq[1,\infty)$ ולכן- $x\in[1,\infty)$

($\supseteq$) ← יהי $x\in[1,\infty)$ ונרצה להראות כי $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ~~[illegible]~~

נגדיר את הפונקציה הבאה- $\lfloor\ \rfloor$ ← החלק השלם של x כלפי מטה. ברור כי $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{N}$

לדוג' $\lfloor 2.25\rfloor = 2$ $\lfloor\pi\rfloor = 3$ וכו'. ולכן- ברור כי $x\in[\lfloor x\rfloor,\lfloor x\rfloor+1] = A_{\lfloor x\rfloor}$

ולכן- לפי הגד' איחוד נקבל כי $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

4. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\emptyset$ ברור כי- $\underset{\text{מוכל תמיד!}}{\emptyset\subseteq} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{5} A_n = \emptyset$

(I) **הכללת דה-מורגן:** (1) $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ (2) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

(II) **הכללת הפילוג:** יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף קב', B קב', אזי - מתקיים $(\bigcup_{i\in I} A_i)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$

הוכחה - (אם יש זמן - אחרת תרגיל ב"ת)

הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$ יהי: $x\in(\bigcup_{i\in I} A_i)\cap B \xleftarrow[\text{חיתוך}]{\text{לפי הג'}} x\in\bigcup_{i\in I} A_i \wedge x\in B \xleftarrow[\text{איחוד כללי}]{\text{לפי הג'}}$

קיים $i\in I$ כך ש- $x\in A_i\wedge x\in B \xleftarrow{\text{לפי הג' חיתוך}}$ קיים $i\in I$ כך ש- $x\in A_i\cap B \xleftarrow{\text{לפי הג'}}$ איחוד קב'

$x\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$.

ש"ב

$\supseteq$ יהי: $x\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B) \Leftarrow$ קיים $i\in I$ כך ש- $x\in A_i\cap B \Leftarrow$ קיים $i\in I$ כך ש-

$x\in A_i\wedge x\in B \Leftarrow$ קיים $i\in I$ כך ש- $\wedge\ x\in B$ $x\in A_i \xleftarrow[\text{חיתוך + איחוד כללי}]{\text{לפי הג'}} x\in(\bigcup_{i\in I} A_i)\cap B$

קב' החזקה:

הג: תהי קב' A. נגדיר קב' החזקה של A, בתור אוסף כל תתי הקב' של A, מסומן - $P(A)$.

פורמלית: $P(A)=\{X : X\subseteq A\}$

דוג: $A=\{1,2\}$. מצאו את קב' החזקה של A.

פתרון: $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

שאלה: כמה איברים יש בקב' החזקה?

פתרון: $2^{|A|}$ כאשר $|A|=$ מס' האיברים ב-A. [illegible] נוסחה טובה רק עבור קב' סופית

(הוכחה בהמשך)

תרגיל: הוכיחו/הפריכו -

א. לכל A,B מתקיים - $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

ב. לכל A,B מתקיים $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$

ג. קיימת A כך ש- $A\cap P(A)\neq\phi$.

ד. קיימת A סופית כך ש- $A\cap P(A)=P(A)$.

א. לכל A,B מתקיים - $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

ב. לכל A,B מתקיים $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$

ג. קיימת A כך ש- $A\cap P(A)\neq\emptyset$.

ד. קיימת A סופית כך ש- $A\cap P(A)=P(A)$.

פתרון:

א. הוכחה נוכיח שוויון ע"י מעברי $\longleftrightarrow$

$X\in P(A)\cap P(B) \xleftrightarrow{\text{לפי הג' חיתוך}} X\in P(A)\wedge X\in P(B) \xleftrightarrow{\text{הג' קב' חזקה}} X\subseteq A\wedge X\subseteq B$

$\xleftrightarrow{\text{טענה מההרצאה}} X\subseteq A\cap B \xleftrightarrow{\text{הג' קב' חזקה}} X\in P(A\cap B)$

ב. הפרכה דוגמא נגדית: $A=\{1\}$ $B=\{2\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$ $P(B)=\{\emptyset,\{2\}\}$

$P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$

$P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\Leftarrow A\cup B=\{1,2\}$

ג. הוכחה שימו ♡- הוכחה לטענת קיים - נא להדגים דוג'. נבחר $A=\{\emptyset\}$ ונקבל- $P(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

$A\cap P(A)=\{\emptyset\}\neq\emptyset$

ד. לא נכון שימו ♡ - כדי לסתור טענת קיים צריך להוכיח "לכל":

נניח שכן - ונקבל - כי $\underbrace{P(A)}_{\text{לפי הנ' שוויון}}\subseteq \underbrace{A\cap P(A)\subseteq A}_{\text{לפי הג' חיתוך}} \Leftarrow \underbrace{P(A)}_{2^{|A|}}\subseteq \underbrace{A}_{|A|}$ וזו סתירה משיקולי עוצמה.

תרגיל ממבחן:

יהיו A,B,C קב'. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $A \not\subseteq B \cap C$ אזי - $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\neq\emptyset$

ב. אם $A \subseteq B$ אזי - $A\cup(B\setminus A)=B$

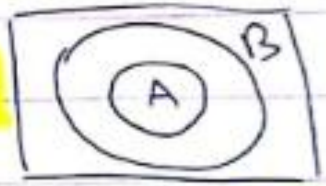
ג. אם $A\cap B=\emptyset$ אזי - $P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}$.

פתרון:

א. הפרכה. דוגמה נגדית: $A=\{1,2\}$ $B=\{1\}$ $C=\{2\}$ ראשית ניתן לראות שמתקיימים תנאי השאלה. $A=\{1,2\}\nsubseteq B\cap C=\emptyset$

$A\setminus B=\{2\}$ $A\setminus C=\{1\}$ $\Rightarrow \{2\}\cap\{1\}=\emptyset \rightarrow$ סתירה לדרישה.

ב. נכון



נסתכל על $B=U$ (קבוצה אוניברסלית) ונקבל כי: $B\setminus A=A^c$ ולכן נקבל כי: $A\cup A^c=U=B$

ודבר שמתקיים.

ג. נכון. נב"ש - $P(A)\cap P(B)\neq\{\emptyset\}$ מכיוון שהקבוצה הריקה שייכת לכל קב' חזקה החיתוך אינו-ריק. לכן-לפי הנחת השלילה

קיימת קב' לא ריקה $C\neq\emptyset$ כך ש- $C\in P(A)\cap P(B)$ ולפי הגד' קב' חזקה נקבל כי $\underbrace{C\subseteq A}_{1}\wedge\underbrace{C\subseteq B}_{2}$

$C\neq\emptyset$ ולכן-קיים $c\in C$ ולפי ההכלה (1) $\Leftarrow$ $c\in A$ ולפי ההכלה (2) $c\in B$.

$\Leftarrow c\in A\wedge c\in B \Leftarrow c\in A\cap B$ בסתירה לנתון ש- $A\cap B=\emptyset$. מש"ל

מכפלה קרטזית:

הג': מכפלה קרטזית של 2 קב' A ו-B - אוסף של זוגות סדורים $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

הבדל בין קב' לזוג סדור: (1) בזוג סדור האיברים יכולים להיות שווים. $(1,1)$ מוגדר בעוד ש- $\underbrace{\{1,1\}}_{\text{אין דבר כזה}} = \{1\}$

(2) סדר האיברים **מהותי** כלומר- $(1,2)\neq(2,1)$ בעוד שבקב' $\{1,2\}=\{2,1\}$

הרחבה: ניתן להכליל את ההג' ל-n-יה סדורה $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A\times B\times C\times\dots\times N$

תרג': $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$ חשבו את- $A\times B$

פתרון:

$$\boxed{A\times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}}$$

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

א. לכל קב' A,B,C מתקיים $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

ב. לכל קב' A,B,C,D מתקיים $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

א. לכל קב' A,B,C מתקיים $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

ב. לכל קב' A,B,C,D מתקיים $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$

פתרון:

א. הוכחה. (נעשה הוכחה עם כל המעברים של $\longleftrightarrow$)

$$(x,y)\in A\times(B\cap C)\underset{\text{מכפלה קרטזית}}{\overset{\text{הג'}}{\Longleftrightarrow}}(x\in A)\wedge(y\in B\cap C)\underset{\text{חיתוך}}{\overset{\text{הג'}}{\Longleftrightarrow}}x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)\underset{\text{אסוציאטיביות}}{\Longleftrightarrow}(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)\underset{\text{מכפלה קרטזית}}{\overset{\text{הג'}}{\Longleftrightarrow}}$$

$$(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times C\underset{\text{חיתוך}}{\overset{\text{הג'}}{\Longleftrightarrow}}(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

מש"ל

ב. הפרכה (נמצא דוגמה נגדית:) $A=\{1\}\quad B=\{2\}\quad C=\{3\}\quad D=\{4\}$

(נחשב את האגפים השונים (ונראה שנקבל דברים שונים)

אגף שמאל $(A\times B)\cup(C\times D)=\{(1,2)\}\cup\{(3,4)\}=\{(1,2),(3,4)\}$

אגף ימין $(A\cup C)\times(B\cup D)=\{1,3\}\times\{2,4\}=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$

בהצלחה!!!