פיתרון בוחן ראשון בדידה 2, 83־118, סמסטר ב, תשע"ו

ג' ניסן, 11/4/2016

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן 4 שאלות, **ענו על 3 שאלות בלבד מתוכן**. כל שאלה מזכה ב־34 נקודות. לא ניתן לצבור יותר מ־100 נקודות בסה"כ.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
סה"כ	

בהצלחה!

1. נתבונן במטריצה $M = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1-a & 1 \end{smallmatrix}\right)$, כאשר $a \in \mathbb{R}$ פרמטר כלשהו. הוכח בעזרת אינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 1-a^n & 1 \end{pmatrix}$$

(34 נקודות)

פיתרון

נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n=0$. אכן $M^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (מטריצת היחידה). נניח את נכונות הטענה עבור $n-1 \geq 0$ ונוכיח אותה ל־n. נחשב

$$M^n = M^{n-1}M \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 1-a^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 1-a^n & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל n.

2. נגדיר באופן רקורסיבי את הפונקציה $f:\mathbb{N}\setminus\{1\}\to\mathbb{N}$ הבאה:

בסיס: לכל p ראשוני נגדיר $f(p)=p$

כלל רקורסיבי: אם $n\geq 2$ לא ראשוני נגדיר $f(n)=\sum_{p|n}f(p)$, כלומר סכום ערכי הפונקציה על הראשוניים שמחלקים את n. לדוגמא:

$$f(2)=2, f(3)=3, f(4)=2, f(10)=f(2)+f(5)=7$$

א. הוכח שלכל $n,m\geq 2$ מתקיים: $f(n\cdot m)\leq f(n)+f(m)$ (הדרכה: אין צורך באינדוקציה, תחשבו על הגורמים הראשוניים של המספר). (20 נקודות)

ב. מצא $n,m\geq 2$ עבורם מתקבל שיוויון. (7 נקודות)

ג. מצא $n,m\geq 2$ עבור מתקבל אי שיוויון חזק (קטן ממש). (7 נקודות)

פיתרון

א. לכל $k\in\mathbb{N}$ נסמן $Q_k=\{p\in\mathbb{N}|\ p \text{ is prime}\wedge p|k\}$. נקבל ש־ $f(k)=\sum_{p\in Q_k}p$. נשים לב שאם $p|n\cdot m$ אז $p|n\vee p|m$ ולכן, אם $p\in Q_{n\cdot m}$ אז $p\in Q_n\vee p\in Q_m$, ולכן $f(n\cdot m)=\sum_{p\in Q_{n\cdot m}}p\leq\sum_{p\in Q_n}p+\sum_{p\in Q_m}p=f(n)+f(m)$. (כי הרכיב p יהיה או בסכום של n או בסכום של m או בשניהם, אבל רק פעם אחת בסכום של $n\cdot m$).

ב. נבחר שני ראשוניים שונים, למשל $n=2, m=3$, ונקבל $f(2\cdot 3)=2+3=f(2)+f(3)$.

ג. נבחר מספר שיש בו חזקה גדולה מ־1 של ראשוני, למשל $4=2\cdot 2$, ונקבל $f(2\cdot 2)=2<2+2=f(2)+f(2)$

3. כמה מספרים בעלי n ספרות לכל היותר יש שסכום הספרות שלהם הוא 8? (34 נקודות)

פיתרון

נשים לב שנוכל לרשום מספר בעל $k < n$ ספרות כמספר בעל n ספרות, ע"י הוספת אפסים משמאל. לכן הבעיה שקולה למציאת מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + ... + x_n = 8$, כאשר לכל i: $x_i \geq 0$ שלם. מספר הפתרונות של משוואה זו הוא, כפי שלמדנו, $\binom{n+8-1}{8}$.

4. תהי A קבוצה עם $|A|=n\in\mathbb{N}$, ו־R יחס סדר מלא על A (כלומר, $\forall a,b\in A:\ aRb\vee bRa$). מצא את $|R|$. (34 נקודות)

פיתרון:

תחילה יש לבחור את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, מכיוון שמדובר ביחס סדר מלא ושהוא אנטי־סימטרי, כלומר $\binom{n}{2}$ זוגות. מכיוון שהוא גם רפלקסיבי, אם $a\in A$, אז aRa ולכן יש להוסיף n איברים. לכן נקבל כי $|R|=\binom{n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$.