תרגיל בית 2 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. (חימום) תהי G חבורה, ו-$a \in G$ איבר. הוכיחו:

1. אם $aa = a$, אזי $a = e$.
2. אם יש $b \in G$ כך ש-$ab = e$ אזי $ba = e$ ו-$b = a^{-1}$.

שאלה 2. (חימום) תהי S אגודה ו-$a \in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 = a$, ולכל $n > 1$ נגדיר $a^{n+1} = a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.
2. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.
3. נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 = e$ ו-$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$. הוכיחו כי $(a_1 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$ לכל $a_1, \dots, a_k \in S$. הסיקו כי $(a^n)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

שאלה 3. בחרו כמה סעיפים וענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:
האם היא אגודה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

1. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.
2. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.
3. $(\mathbb{N}, \max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.
4. $(\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים פרט לכפולות של 3 עם פעולת הכפל הרגילה.
5. תהי X קבוצה. $(P(X), \triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
6. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

7. $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

שאלה 4. תהינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G\times H$ פעולה ״רכיב-רכיב״:

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$$

לכל $g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H$.

1. הוכיחו כי $G\times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H.
2. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G\times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.
3. תהינה G',H' תת־חבורות של G,H בהתאמה. הוכיחו או הפריכו: $G'\times H'$ היא תת־חבורה של $G\times H$.

שאלה 5. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים כי $(ab)^2=a^2b^2$.

שאלה 6. תהי $G=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ חבורה אבלית סופית. נסמן $b=a_1a_2\cdots a_n$. הוכיחו כי $b^2=e$. רשות: בעזרת השאלה הבאה מצאו קריטריון מתי $b=e$.

שאלה 7. תהי G חבורה. נסמן $m_2=\left|\left\{x\in G\,\middle|\,x^2=e\right\}\right|$.

1. הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2\equiv|G|\pmod 2$.
2. הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר $x\neq e$ המקיים $x^2=e$.

הדרכה לסעיף א: העזרו ביחס השקילות הבא על G: $x\sim y\iff x=y\vee xy=e$. מה הגודל של כל מחלקת שקילות?

שאלה 8. יהי F שדה. קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם תת־הקבוצות הבאות הן תת־חבורות של החבורות הנתונות או לא:

1. $O_n(F)=\left\{A\in GL_n(F)\,\middle|\,A^T=A^{-1}\right\}\subseteq GL_n(F)$ המטריצות האורתוגונליות.
2. $\{A\in M_n(F)\,|\,\det A=0\}\subseteq M_n(F)$.

שאלה 9. תהי G חבורה ו-H,K תת־חבורות שלה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $H\cap K$ היא תת־חבורה.
2. $H\cup K$ היא תת־חבורה.
3. $HK=\{hk\,|\,h\in H,k\in K\}$ היא תת־חבורה.
4. אם G אבלית אז HK היא תת־חבורה.
5. $\Delta_H=\{(h,h)\,|\,h\in H\}$ היא תת־חבורה של $G\times G$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו פתרון שלהן.

שאלה 10. הוכיחו שאם באגודה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e \in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש-$xa = c$, ואז $ce = xae = xa = c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

בהצלחה!