הרצאה 18

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

משוואות אוילר:

רוצים לעבור למערכת גוף.

בהינתן $\vec{A}$ במערכת גוף

במערכת המעבדה:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{A}$$

במערכת מעבדה

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{A}$$

במערכת גוף

BS

שינוי במערכת גוף

לדוגמה:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d'\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{P} = \vec{F}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{L} = \vec{\tau}^{ext}$$

BS $\vec{L} = (I_1\Omega_{x_1}, I_2\Omega_{x_2}, I_3\Omega_{x_3})$

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} = (I_1\dot{\Omega}_{x_1}, I_2\dot{\Omega}_{x_2}, I_3\dot{\Omega}_{x_3})$$

משוואות אוילר

$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_{x_1} + (I_3 - I_2)\Omega_{x_2}\Omega_{x_3} = \tau_{x_1} \\ I_2\dot{\Omega}_{x_2} + (I_1 - I_3)\Omega_{x_3}\Omega_{x_1} = \tau_{x_2} \\ I_3\dot{\Omega}_{x_3} + (I_2 - I_1)\Omega_{x_1}\Omega_{x_2} = \tau_{x_3} \end{cases}$$

עבור מקרה שאין טורק והגוף סימטרי.

$I_1 = I_2 \neq I_3$

$$\dot{\Omega}_{x_1} + \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\Omega_{x_2}\Omega_{x_3} = 0$$

$$\dot{\Omega}_{x_2} + \frac{(I_1 - I_3)}{I_1}\Omega_{x_3}\Omega_{x_1} = 0$$

$$\dot{\Omega}_{x_3} + \frac{0}{I_3}\Omega_{x_1}\Omega_{x_2} = 0$$

$$\dot{\Omega}_3 = 0$$

$$\Omega_3 = const$$

$$\dot{\Omega}_1 = -\underbrace{\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\Omega_3}_{\omega\to const}\Omega_2$$

$$\dot{\Omega}_2 = \underbrace{\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\Omega_3}_{\omega = const}\Omega_1$$

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2$$

$$\dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1$$

$\Omega_1 = A\cos(\omega t)$ $\quad$ $\Omega_2 = A\sin(\omega t)$

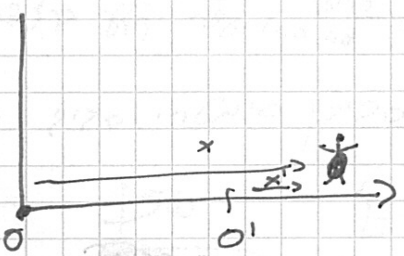
$\Omega_3 = const$

$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = const$

תנועה במערכות לא אינרציאליות:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

O' נע בתאוצה קבועה a



$$V = V' + \underbrace{at + V_0}_{\text{מהירות } O'}$$

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(V' + at + V_0) = m\frac{dv'}{dt} +$$

$$\underbrace{\boxed{m\frac{dv}{dt}}}_{= F_{ext}} = \underbrace{\boxed{m\frac{dv'}{dt}}}_{\neq F_{ext}} + \underbrace{\boxed{ma}}_{F_{eff}}$$

$$m\frac{dv'}{dt} = F_{ext} - F_{eff}$$

וקטור $\vec{X}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt} + \Omega \times \vec{x}$$

$$\cancel{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}}{dt} + \Omega}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'}{dt}\left(\frac{d'\vec{X}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{X}\right) + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d'\vec{x}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{X}\right)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'^2\vec{x}}{dt} + \frac{d'}{dt}(\vec{\Omega} \times \vec{X}) + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X})$$

נניח: $\vec{\Omega} = const$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{V}}_{\text{מהירות}} + \Omega \times (\Omega \times \vec{x})$$

$V' \leftarrow$

במערכת מסתובבת

$$\underbrace{m\frac{d\vec{V}}{dt}}_{= F_{ext}} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + 2m\vec{\Omega} \times \vec{V} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X})$$

$$F_{ext} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + \boxed{}$$

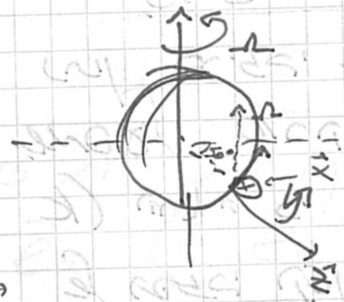
$$\vec{F}_{ext} \underbrace{-2m(\vec{\Omega}\times\vec{V}')}_{\text{כוח קוריוליס}} - m\underbrace{\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{x})}_{\text{תאוצה רדיאלית}} = m\frac{d\vec{V}'}{dt} = m\vec{a}'$$

דוגמה:

כח כבידה:

כח קוריוליס:

$$F = -2m(\vec{\Omega}\times\vec{V})$$



$$\vec{\Omega} = \Omega\cos 50^\circ\,\hat{y} - \Omega\sin 50\,\hat{z}$$

$$\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{V} = -2m\vec{\Omega}\times[\Omega\cos 50^\circ\hat{y} - \Omega\sin 50^\circ\hat{z}]$$
$$\times[V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}]$$

$$\vec{F}_{cor} = 2m\Omega\cos 50\,V_x\hat{z} - 2m\Omega\cos 50^\circ V_z\hat{x} + 2m\Omega\sin 50\,V_x\hat{y}$$
$$-2m\Omega\sin 50\,V_y\hat{x}$$

$$m\vec{a} = -mg\hat{z} + \vec{F}_{cor}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -2\Omega\cos 50^\circ V_z - 2\Omega\sin 50\,V_y$$

$$\frac{dV_y}{dt} = 2\Omega\sin 50\,V_x$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -g + 2\Omega\cos 50\,V_x$$

נניח שהסטיה לכיוון x היא קטנה לכן V_x קטן

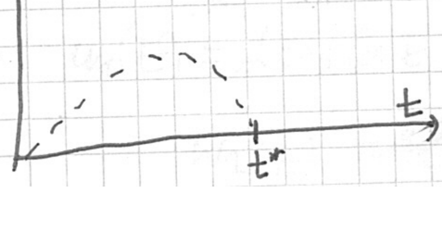
$$\frac{dV_x}{dt} = -2\Omega\cos 50 V_z - 2\Omega\sin 50 V_y$$

$$\frac{dV_y}{dt} = 0$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -g$$

$$V_z = V_z(0) - gt$$

$$V_y = V_y(0)$$



$$\frac{d^2x}{dt^2}\;\frac{dV_x}{dt} = -2\Omega\cos 5\,[V_z(0) - gt]$$
$$-2\Omega\sin 5\,V_y(0)$$

$$\frac{dx'}{dt} = -2\Omega\cos s_0\left[V_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2\right] - 2\Omega\sin s_0\, V_y(0)\, t$$

$$x_{(t^*)} = -2\Omega\cos s_0\left[\frac{1}{2}V_z(0)t^{*2} - \frac{1}{6}gt^{*3}\right] - 2\Omega\sin s_0\, V_y(0)\frac{t^{*2}}{2}$$

הסטייה.

תרגול 9:

פריזבי = Fris___

נתון פריזבי שעף באוויר והוא מתנגד ישחיכוך באוויר שמפעיל טורק $\vec{G} = -c\vec{\omega}$

א) הראה כי הרכיב של $\vec{\omega}$ בכיוון ציר הסימטריה של הפריזבי של הפריזבי קטן אקספוננציאלית.

ב) הראה כי הזווית בין $\vec{\omega}$ ל-$\hat{e}_3$ (ציר הסימטריה) קטן (הולך ל-0).

נתחיל במשוואות אוילר

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = G_1 = -c\omega_1$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = G_2 = -c\omega_2$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = G_3 = -c\omega_3$$

בנוסף $\quad I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 \equiv I$

א) $\quad I_3\dot{\omega}_3 = -c\omega_3$

$$2I\dot{\omega}_3 = -c\omega_3$$

$$\frac{d\omega_3}{\omega_3} = -\frac{c}{2I}dt$$

$$\ln\omega_3 = -\frac{c}{2I} + c$$

$$\omega_3(t) = Ae^{-\frac{c}{2I}t}$$

$\hat{e}_3$ $\vec{z} \parallel \vec{\omega}$

ב) צריך להראות ש $\alpha \to 0$

$$\vec{\omega}\cdot\hat{e}_3 = |\omega||\hat{e}_3|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}$$

(1) $\quad I\dot{\omega}_1 + I\omega_2\omega_3 = -c\omega_1 \;/\cdot\omega_1$

(2) $\quad I\dot{\omega}_2 - I\omega_1\omega_3 = -c\omega_2 \;/\cdot\omega_2 \qquad I(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) = -c(\omega_1^2 + \omega_2^2)$

$$\frac{1}{2}I\frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -c(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

נגדיר $\quad u = \omega_1^2 + \omega_2^2$

$$\frac{1}{2}I\frac{du}{dt} = -cu$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2c}{I}dt \qquad u(t) = Be^{-\frac{2c}{I}t}$$