# אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 3

1. מצאו את הפולינום המינימלי של $\rho_5 = cis(2\pi/5)$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

2. הוכיחו ש $F(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = F(\sqrt{a},\sqrt{b})$ כאשר $a,b \in F$ ומתקיים $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$ וגם $1+1 \neq 0$ ב $F$ (כלומר $F$ ממאפיין $\neq 2$).

3. הראו $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}},\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right) \neq \mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)$. מהי דרגת ההרחבה מעל $\mathbb{Q}$ בכל אחד מהצדדים?

4. הראו שאם $a,b \in \mathbb{Z}$ זרים ואינם ריבועים, אזי $[\mathbb{Q}[\sqrt{a},\sqrt{b}]:\mathbb{Q}] = 4$.

5. א. הוכיחו שאם $F$ שדה סופי אזי $F^* = F - \{0\}$ חבורה ציקלית.

ב. הראו שאם $F$ שדה אינסופי אזי $F^* = F - \{0\}$ לעולם אינה חבורה ציקלית (רמז: חלקו למקרים של מאפיין 0 או מאפיין p>0. אם המאפיין p>0 הניחו בשלילה ש $F^* = \langle u \rangle$ וחלקו למקרים בהם $u$ טרנסנדנטי או אלגברי מעל שדה הבסיס $\mathbb{F}_p$ ).

בונוס: הוכיחו או הפריכו: כל תת-שדה של $\mathbb{C}$ סגור להצמדה מרוכבת.