מבנים אלגבריים תרגול 6

26 באפריל 2021

1 תתי חבורות נורמליות

תרגילים:

1. תהא G חבורה, $H \le G$ תת־חבורה. הוכיחו:

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G \forall h \in H : g^{-1}hg \in H$$

פתרון: $\Rightarrow$: יהיו $g \in G, h \in H$. מהנתון על תת חבורה נורמלית, כלומר:

$$gH = Hg$$

נקבל שקיים $h' \in H$ כך ש־:

$$gh' = hg$$

נכפיל ב־g^{-1} משמאל, ונקבל:

$$g^{-1}hg = h' \in H$$

$\Leftarrow$: נתון שלכל g, h $g^{-1}hg \in H$. צ"ל: $\forall g : gH = Hg$. אז יהי $g \in G$, ונוכיח שיוויון בין הקבוצות:
$\subseteq$: יהי $hg \in Hg$. ידוע מהנתון שמתקיים: $g^{-1}hg \in H$ כלומר יש $h' \in H$ כך ש־ $g^{-1}hg = h'$ עכשיו נכפיל ב־g משמאל ונקבל: $hg = gh' \in gH$.
$\supseteq$: יהי $gh \in gH$. כעת, נשתמש בנתון עבור g^{-1}, כלומר: ידוע ש־ $\left(g^{-1}\right)^{-1} hg^{-1} = ghg^{-1} \in H$ כלומר, קיים $h' \in H$ כך ש־ $ghg^{-1} = h'$. נכפיל ב־ g מימין ונקבל:

$$gh = h'g \in Hg$$

2. נמצא תת־חבורה נורמלית חשובה של S_n. בשלבים:

(א) נגדיר סימן של תמורה: תהי $\pi \in S_n$. נגדיר את קבוצת היפוכי הסדר של π להיות:

$$Inv(\pi) = \{(i,j) | i < j \wedge \pi(j) < \pi(i)\}$$

בהמשך לזה:

$$inv(\pi) = |Inv(\pi)|$$

ומכאן הסימן:

$$sgn(\pi) = (-1)^{inv(\pi)}$$

למשל עבור S_3:

	id	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(3,2,1)$
Inv	$\varnothing$	$\{(1,2)\}$	$\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$	$\{(2,3)\}$	$\{(1,3),(2,3)\}$	$\{(1,2),(1,3)\}$
inv	0	1	3	1	2	2
sgn	+	-	-	-	+	+

(ב) טענה שלא נוכיח בקורס: בהינתן $\pi, \sigma \in S_n$ אז מתקיים:

$$sgn(\pi \circ \sigma) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$$

(ג) תראו בבית שהסימן של תמורה מאורך m הוא $(-1)^{m-1}$.

(ד) מתקיים: $sgn(\pi) = sgn(\pi^{-1})$.

(ה) נגדיר:

$$A_n = \{\pi \in S_n : sgn(\pi) = 1\}$$

אוסף התמורות הזוגיות. הוכיחו: A_n היא תת־חבורה נורמלית של S_n.
פתרון: נראה תחילה שהיא תת־חבורה: ראשית, $id \in A_n$ כי הסימן הוא

$$sgn(id) = (-1)^0 = 1$$

בנוסף, בהינתן $\pi, \sigma \in A_n$ צריך להוכיח $\pi\sigma^{-1} \in A_n$, ואכן:

$$sgn(\pi \circ \sigma^{-1}) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1$$

כעת, כדי להוכיח שהיא נורמלית נראה שמתקיים: $[S_n : A_n] = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$.
נגדיר את B_n להיות אוסף התמורות האי־זוגיות, ונוכיח $|B_n| = |A_n|$, ולכן

בסה"כ: $[S_n : A_n] = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$.
הוכחה: נגדיר $f : A_n \to B_n$ ע"י:

$$f(\pi) = (1,2) \circ \pi$$

ונגדיר את ההופכית: $f^{-1} : B_n \to A_n$ ע"י:

$$f^{-1}(\sigma) = (1,2) \circ \sigma$$

נותר לראות שאכן ההרכבה בשני הצדדים נותנת את הזהות:

$$f^{-1} \circ f(\pi) = f^{-1}((1,2) \circ \pi) = (1,2) \circ (1,2) \circ \pi = \pi$$

$$f \circ f^{-1}(\pi) = f((1,2) \circ \pi) = (1,2) \circ (1,2) \circ \pi = \pi$$

הערה: לכל $n > 4$ מתקיים ש־ A_n היא תת־החבורה הנורמלית היחידה של S_n.
הרעיון מאחורי תת־חבורה נורמלית מאינדקס 2: כי אז למחלקות הימניות יש שתי אפשרויות:

$$Hg = \begin{cases} H & g \in H \\ G \setminus H & g \notin H \end{cases}$$

ובדיוק אותן שתי אפשרויות יש למחלקות השמאליות:

$$gH = \begin{cases} H & g \in H \\ G \setminus H & g \notin H \end{cases}$$