מבנים אלגבריים תרגול 8

25 במאי 2021

1 חבורת מנה

ראיתם שבהינתן חבורה G, ותת חבורה נורמלית $H \trianglelefteq G$, אז ניתן להגדיר פעולה על המחלקות השמאליות, ע"י:

$$(gH)(g'H) = gg'H$$

וקבוצת המחלקות עם הפעולה היא חבורה, ונקראת חבורת המנה G/H.

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם G חבורה סופית אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall g \in G : g^n = e$.

(ב) אם G חבורה בה הסדר של כל איבר הוא סופי, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall g \in G : g^n = e$.

פתרון: א. הוכחה: ניקח $n = |G|$, ואז לפי לגראנז' נקבל $\forall g : g^n = e$.

ב. הפרכה: נתבונן בחבורה החיבורית $\mathbb{Q}$, ובתת חבורה נורמלית שלה $\mathbb{Z}$. כעת נתבונן בחבורה המנה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. איך נראים איברים בחבורת המנה?

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{a + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Q}\}$$

נשים לב שיש הרבה כפילויות בכל מחלקה שמאלית, למשל:

$$0.54 + \mathbb{Z} = 1.54 + \mathbb{Z} = -1.46 + \mathbb{Z}$$

"קל לראות" שכל מחלקה ניתן להגדיר אותה ע"י נציג $a \in [0,1)$. כי בעצם בכל הסיפור מעניין מה קורה אחרי הנקודה.

דוגמא לפעולה בין מחלקות:

$$\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{2}{3} + \mathbb{Z}\right) = 1\frac{1}{3} + \mathbb{Z} = \frac{1}{3} + \mathbb{Z}$$

מהו איבר היחידה של חבורת המנה? תמיד איבר היחידה של חבורת מנה זה $eH = H$. אצלנו נקבל שהמחלקה של 0 היא איבר היחידה, כלומר $\mathbb{Z}$.
כעת נראה שחבורה המנה הזו מהווה הפרכה. ראשית, נראה שהסדר של כל איבר הוא סופי. יהי $a + \mathbb{Z} \in {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$. אנחנו רוצים להראות שהסדר של איבר זה הוא סופי. נבחר נציג למחלקה השמאלית, שהוא מספר רציונאלי מהצורה $\frac{m}{k} \in [0,1), k, m \in \mathbb{N}$, ואז נקבל:

$$\underbrace{\left(\frac{m}{k} + \mathbb{Z}\right) + \cdots + \left(\frac{m}{k} + \mathbb{Z}\right)}_{k \text{ times}} = k \cdot \frac{m}{k} + \mathbb{Z} = m + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

כעת נראה, שאין n שעובד עבור כולם. יהי $n \in \mathbb{N}$, נמצא מחלקה שמאלית $a + \mathbb{Z}$ כך ש־:

$$n \cdot (a + \mathbb{Z}) = na + \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$$

נוכל לקחת למשל $a = \frac{1}{n+1}$, ואז כיון ש־ $\frac{n}{n+1} \notin \mathbb{Z}$ אז $\frac{n}{n+1} + \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$.

2 משפט האיזו הראשון

אם $\varphi : G_1 \to G_2$ הומ', אז:

$$G_1/_{\ker\varphi} \cong Im(\varphi)$$

תרגילים:

1. מצאו תת־חבורה $H \leq \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : -\pi \leq \theta < \pi\}$ עבורה מתקיים:

$$^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} \cong H$$

פתרון: נגדיר הומ' $\varphi : \mathbb{Q} \to \Omega$ ע"י:

$$\varphi(a) = e^{i2\pi a}$$

זהו הומ':

$$\varphi(a+b) = e^{i2\pi(a+b)} = e^{i2\pi a} \cdot e^{i2\pi b} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

נמצא את הגרעין:

$$\ker\varphi = \{a \in \mathbb{Q} : e^{i2\pi a} = 1\} = \mathbb{Z}$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך שכדי לקבל 1, דרושה זוית שהיא מספר שלם של 2π.

נמצא את התמונה:

$$Im(\varphi) = \{e^{i2\pi a} : a \in \mathbb{Q}\} = \{z \in \mathbb{C} | \exists n : z^n = 1\}$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מהצגת $a = \frac{m}{k}$, ואז כמו בתרגיל הקודם. ואז לפי משפט האיזו הראשון:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \{z \in \mathbb{C} | \exists n : z^n = 1\}$$

2. הוכיחו:

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$$

כאשר $\mathbb{R}^\times$ זו החבורה הכפלית של הממשיים השונים מאפס.

פתרון: נגדיר הומ׳ $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ ע"י:

$$\varphi(A) = \det(A)$$

זהו הומ׳:

$$\varphi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

הוא על: יהי $x \in \mathbb{R}^\times$, נמצא $A \in GL_n(\mathbb{R})$ כך ש־ $\det(A) = x$:

$$A = \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \det(A) = x$$

נמצא את הגרעין:

$$\ker\varphi = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \varphi(A) = 1\} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{R})$$

ולכן לפי משפט האיזו הראשון נקבל:

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$$