מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה X ויחס R על הקבוצה. עבור כל יחס קבע האם הוא יחס סדר, יחס סדר חזק[1] ו\או יחס סדר מלא. (ייתכן שיותר מאחד מהם. שימו לב שיחס סדר מלא הוא יחס סדר.)

1. $X = \mathbb{R},\ \ R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\}$
2. $X = \mathbb{R},\ \ R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$
3. $X = \mathbb{N}, R = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n^2 < m\}$

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4,5,6\}$. הסבירו מדוע אין יחסים סדר מלאים נוספים.

שאלה 3

תהי X קבוצה ו-R יחס סדר על X. נניח כי $Y \subseteq X$ ונגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$. הראו כי S יחס סדר על Y.

שאלה 4

תהי X קבוצה ויהיו R, S שני יחסי סדר מלאים על X. הוכיחו כי אם $S \subseteq R$ אז $R = S$.

שאלה 5

תהי X קבוצה ו-R יחס על X. נגדיר $S = \{(b,a) \mid \ (a,b) \in X \times X \setminus R\}$. הוכיחו כי אם R הוא יחס סדר מלא אז S הוא יחס סדר חזק.[2]

שאלה 6

יהי R יחס סדר על X. נגדיר:

א. $R^2 = R \circ R = \{(x,y) \mid \exists z \in X : xRz \wedge zRy\}$

ב. $R^{op} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

ג. $I = \{(x,x) \mid x \in X\}$

הוכיחו כי R יחס סדר אם ורק אם $R^2 \subseteq R$ וגם $R \cap R^{op} = I$.

שאלה 7

תהי A קבוצה ותהי X קבוצת החלוקות של A. נגדיר יחס סדר $\leq$ על X באופן הבא: עבור $\Pi, \Pi' \in X$ נכתוב $\Pi \leq \Pi'$ אם לכל $A \in \Pi$ קיימת $W \subseteq \Pi'$ כך ש-B $A = \cup_{B \in W}$ ("כל קבוצה ב-Π היא איחוד של קבוצות ב-Π'").

א. הוכיחו כי $\leq$ הוא יחס סדר על X.

---

[1] למי שלא זוכר\מכיר: יחס $\prec$ על קבוצה A הוא <u>יחס סדר חזק</u> אם הוא <u>טרנזיטיבי</u>, <u>א-רפלקסיבי</u> (לכל $a \in A$, הפסוק $a \prec a$ שקרי) <u>ואו-סימטרי</u> (אם $a \prec b$ אז לא מתקיים $b \prec a$). [במילים אחרות: הוא כמו היחס $<$ על מספרים ממשיים.]

[2] הערה: אין טעות בניסוח: הסדר של a ו-b מתהפך בהגדרה של S.

ב. מה האיברים המקסימליים והמינימליים ב-X? (איבר $x \in X$ יקרא מקסימלי אם $x \le y$ גורר ש-$x = y$. הוא יקרא מינימלי אם $y \le x$ גורר $x = y$.)

ג. האם תמיד $\le$ יחס סדר <u>מלא</u>?