טופולוגיה: 88-222-05
מרצה: פרופ' מגרל
מתרגלים: סולי ומני

תרגיל בית מספר 1

שאלה 1

נגדיר 3 מטריקות מעל $\mathbb{R}^2$.

המטריקה האוקלידית - $d(x,y)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2}$

מטריקת הסכום - $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{2}\left|x_i-y_i\right|$

מטריקת מקסימום- $d_{\max}(x,y)=\max\left\{\left|x_1-y_1\right|,\left|x_2-y_2\right|\right\}$

מצאו את המרחק בין $u=(2,5),v=(-1,1)$ עבור 3 המטריקות ותנו תאור גרפי של הכדורים $B_{d_{\max}}(u,1),B_{d_1}(u,1),B_d(u,1)$.

שאלה 2

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה a-adic באופן הבא: עבור $1\neq a\in\mathbb{N}$ מגדירים מטריקה על $\mathbb{Z}$-

$$d_a\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{a^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$, עבור $k\left(x,y\right)=\max\left\{i:a^i\mid\left(x-y\right)\right\}$.

א) הוכיחו שהיא אכן מטריקה.

<u>רמז</u>: הראו כי $k(x,z)\geq\min\{k(x,y),k(y,z)\}$ והסיקו $d(x,z)\leq\max\left\{d(x,y),d(y,z)\right\}$.

ב) תארו את הכדור $B_{d_5}(32,\frac{1}{25})$ במרחב $\left(\mathbb{Z},d_5\right)$.

שאלה 3

יהיו $x_1,x_2\in(X,d)$ ו- $r_1,r_2>0$ ויהיו $B(x_1,r_1),B(x_2,r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p\in B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$, ו - $r=\min\{r_1-d\left(p,x_1\right),r_2-d\left(p,x_2\right)\}$

הוכח ש- $B(p,r)\subseteq B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$.

שאלה 4

<u>הגדרה</u>:
תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי כלשהו (X,d) . נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים $x\in X$ כך שקיים $n_0\in\mathbb{N}$ עבורו לכל $n>n_0$ מתקיים $x_n=x$.

א. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי (X,d_Δ) אם ורק אם היא קבועה לבסוף. כזכור $d_\Delta(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f:X\to Y$ פונקציה כלשהי. יהיו $A\subseteq X, B\subseteq Y$ תת קבוצות. אזי "התמונה של A" היא: $f(A)=\{f(x)\in Y : x\in A\}$; ו"התמונה ההפוכה של B" היא: $f^{-1}(B)=\{x\in X : f(x)\in B\}$.

<u>שאלה 5</u>

תהי $f:X\to Y$ הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}\left(B_i\right)$ עבור $B_i\subseteq Y$ לכל $i\in I$

ב. $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}f\left(A_i\right)$ עבור $A_i\subseteq X$ לכל $i\in I$

<u>שאלה 6</u>

תהי $f:X\to Y$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}\left(A\right)\right)\subseteq A$ לכל $A\subseteq Y$.

ב. אם f על אזי $f\left(f^{-1}\left(A\right)\right)=A$. תנו דוגמא נגדית במקרה בו f לא על.

ג. $f^{-1}\left(f\left(B\right)\right)\supseteq B$ לכל $B\subseteq X$.

ד. אם f חח"ע אזי $f^{-1}\left(f\left(B\right)\right)=B$ לכל $B\subseteq X$. תנו דוגמא נגדית במקרה בו f אינה חח"ע.

<u>שאלת בונוס:</u>

טופולוגיה: 88-222-05
מרצה: פרופ' מגרל
מתרגלים: סולי ומני

הראו שאם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו d המטריקה המושרה מהנורמה אז **לא** קיימים כדורים **שונים** $B(a_1,r_1),B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ ו $B(a_1,r_1)\supset B(a_2,r_2)$.

בהצלחה!