גאומטריה אוקלידית- פתרון תרגיל 4

הוכיחו את משפט $H.1$:

א. $P = P'$ אם ורק אם P על מעגל ההפיכה γ.

הוכחה

נוכיח שנקודה על γ עוברת לעצמה.

נקודה P על γ מקימת: $|OP| = r$ כאשר O מרכז המעגל γ ו $r > 0$ רדיוס.

ולכן עפ"י המשוואה $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ נחלץ את $|OP'|$ ונקבל:

$|OP'| = \frac{r^2}{|OP|=r} = r \Leftarrow |OP'| = |OP| \Leftarrow P = P'$, כיוון ש-$P$ ו-P' **נמצאות על אותה קרן** ומקימות שמרחקן מהראשית שווה [$|OP| = |OP'|$].

ב. אם P בתוך γ אז P' מחוץ ל-γ, ולהיפך, אם P מחוץ ל- γ אז P' בתוך γ.

הוכחה

למעשה אנחנו מוכיחים נוכיח שהעתקה מחליפה את פנים המעגל בחוץ.

כל נקודה P בפנים המעגל מקימת את אי-השוויון הזה: $|OP| < r$.

ולכן עפ"י המשוואה $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ וכיוון שאנו יודעים כי $|OP| < r$ אזי בהכרח על מנת שהמכפלה תתן לנו r^2 נבדוק את האורך $|OP'|$. האופציות הן:

אם $|OP'| < r$ נקבל $\underbrace{|OP|}_{<r} \cdot \underbrace{|OP'|}_{<r} < r^2$ ולכן נפסל.

אם $|OP'| = r$ נקבל $\underbrace{|OP|}_{<r} \cdot \underbrace{|OP'|}_{=r} < r^2$ ולכן נפסל.

(*) ורק כאשר $|OP'| > r$ נוכל לקבל $|OP| \cdot |OP'| = r^2$, כי רק משהו שקטן מ-r כפול משהו שגדול מ-r יכול לתת לנו $|OP'| > r \Leftarrow r^2$.

כלומר כל הנקודות בפנים המעגל $|OP| < r$ מועתקות לחוץ המעגל $|OP'| > r$.

אותו דבר ההיפך – כל הנקודות מחוץ למעגל מועתקות לפנים המעגל.

הוכיחו את משפט $H.4$:

נניח ש-T ו-U נקודות על γ שלא עומדות זו מול זו על קוטר (כלומר TU מיתר שאינו קוטר, אינו עובר דרך O מרכז המעגל γ), ונניח P <u>הקוטב</u> של TU, אז $PT \cong PU$, $\sphericalangle PTU \cong \sphericalangle PUT$, $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{TU}$

מסקנה: המעגל δ עם מרכז P ורדיוס $PT \cong PU$ חותך את γ ומאונך לו בנקודות T ו-U.

הוכחה

נתבונן במשולשים ישרי-זווית ΔOTP ו- ΔOUP:

$\sphericalangle OTP = \sphericalangle OUP = 90^{\circ}$ - זווית בין משיק לרדיוס בנקודת ההשקה היא ישרה.

$OT \cong OU$ רדיוסים ב-γ (ניצב)

$OP \cong OP$ צלע משותפת (יתר במשולשים ישרי-זווית).

לפי קריטריון יתר-ניצב לחפיפת משולשים ישרי-זווית נקבל $\Delta OTP \cong \Delta OUP$.

מכאן לפי הגדרת משולשים חופפים נקבל בפרט: $PT \cong PU$, $\sphericalangle OPT \cong \sphericalangle OPU$.

כעת נתבונן ב-ΔTPU:

$PT \cong PU$ קיבלנו קודם לפי חפיפה, לכן המשולש שווה-שוקים.

זוויות הבסיס $\sphericalangle PTU \cong \sphericalangle PUT$ במשולש שווה שוקים הן חופפות.

מכיוון ש-$\sphericalangle OPT \cong \sphericalangle OPU$ (קיבלנו בחפיפה הקודמת), $\overleftrightarrow{PO}$ חוצה זווית $\sphericalangle TPU$.

במשולש שווה שוקים חוצה הזוית הראש, $\overleftrightarrow{PO}$, מאונך לבסיס TU, לכן $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{TU}$.

נשים לב כיוון שהמשיק למעגל γ מאונך לרדיוס המעגל. משיק זה הינו רדיוס של המעגל δ, אנו מקבלים כי הרדיוסים של שני המעגלים מאונכים זה לזה ולכן לפי הגדרה **המעגלים מאונכים.**