

## תרגול מס' 1 בחשבון אינפי' 2

### חקירת פונקציות.

**הערה:** אם  $f(x)$  גזירה פעמיים ב- $x_0$ , אזי  $x_0$  היא נקודת פיתול אם"ם  $f''(x)$  מחליפה סימן ב- $x_0$ .

לפיכך הנקודות **החשודות לפיתול** (בדומה לנקודות החשודות לקיצון) תהיינה הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת או לא קיימת.  $f''(x_0) = 0$  לבד לא מבטיח פיתול, למשל  $f(x) = x^4$  בראשית.

לעומת זאת אם  $f(x)$  גזירה שלוש פעמים ברציפות, ומתקיים:  $f''(x_0) = 0$  וגם  $f'''(x_0) \neq 0$  אז

$$x_0 \text{ היא נקודת פיתול: עפ"י טיילור } f(x) - h(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3 \text{ באשר } h(x) \text{ היא המשיק}$$

לפונקציה ב- $x_0$ . אכן, נניח בה"כ כי:  $f'''(x_0) > 0$  אז בסביבה מספיק קטנה עדיין  $f'''(x) > 0$  ולכן גם

$f'''(c) > 0$  כלומר משמאל ל- $x_0$  המשיק נמצא מתחת לפונקציה ומשמאל ל- $x_0$  הוא נמצא מעליה.

**באופן יותר כללי:** תהא  $f$  פונקציה גזירה  $n+2$  פעמים בסביבה של הנקודה  $x_0$  כך שלכל

$1 \leq k \leq n$  מתקיים:  $f^{(k)}(x_0) = 0$  אבל:  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ . אם  $n+1$  הוא זוגי אזי  $x_0$  היא נקודת

קיצון מקומי, אחרת  $x_0$  היא נקודת פיתול.

**הוכחה:** תנאי משפט טיילור מסדר  $n+1$  מתקיימים בסביבה כלשהי של  $x_0$ . כמו כן כל הנגזרות עד

לנגזרת ה- $n$  (למעט הפונקציה עצמה) מתאפסות ב- $x_0$  ולכן נוכל לרשום:

$$f(x) - f(x_0) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ עבור נקודה } c \text{ כלשהי בין } x \text{ ל-} x_0. \text{ נניח בה"כ}$$

כי:  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ . גזירה ולכן רציפה ב- $x_0$ . מכאן שקיימת סביבה  $U$  בה לכל  $x$

מתקיים:  $f^{(n+1)}(x) > 0$ . הנקודה  $c$  נמצאת אף היא ב- $U$  ולכן גם:  $f^{(n+1)}(c) > 0$ . כעת אם

$n+1$  זוגי, אז נקבל:  $\forall x \in U: f(x) - f(x_0) \geq 0$  כלומר  $x_0$  נקודת קיצון מקומי.

פונקצית המשיק ב- $x_0$  היא:  $y = f(x_0)$ . לכן אם  $n+1$  אי-זוגי, אז משמאל ל- $x_0$  הפונקציה היא

מתחת למשיק ומימין ל- $x_0$  הפונקציה היא מעל למשיק. כלומר  $x_0$  נקודת פיתול.  $\square$

**הערה:** נקודת פיתול לא מחייבת את הנגזרת הראשונה להתאפס, למשל:  $x^3 + x$  בראשית.

## אסימפטוטות

**הגדרה:** קו ישר  $y = ax + b$  נקרא **אסימפטוטה משופעת** לפונקציה  $f(x)$  אם מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{או} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

אם כן:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$  לכן נחשב את הקבועים  $a, b$  כך:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$$

**הגדרה:** קו ישר מהצורה  $x = x_0$  יקרא **אסימפטוטה אנכית** אם:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

**דוגמה:** לפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  יש אסימפטוטה אנכית  $x = 1$ . נחשב את המשופעות:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

כלומר האסימפטוטה המשופעת היא:  $y = x + 1$ .

### שליבים בחקירת פונקציה:

1. מציאת תחום הגדרה.
2. קביעת זוגיות / אי-זוגיות.
3. מציאת נקודות קיצון ותחומי עליה / ירידה (היכן הנגזרת הראשונה מחליפה סימן?)
4. קביעת נקודות פיתול ותחומי קעירות / קמירות (היכן הנגזרת השנייה מחליפה סימן?)
5. חישוב אסימפטוטות (מאונכות ומשופעות).
6. התנהגות הפונקציה ב- $\pm\infty$ .
7. ציור של גרף הפונקציה.

**תרגיל:** חקור את הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^3}{12-x^2}$

**פתרון:** 1. תחום הגדרה:  $x \neq \pm\sqrt{12}$

2. כלומר הפונקציה היא אי-זוגית.  $f(-x) = \frac{-x^3}{12-x^2} = -f(x)$ .

3. נגזור ונקבל:  $f'(x) = \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}$  כלומר הנקודות החשודות הן:  $\{0, \pm 6, \pm \sqrt{12}\}$ .

נבדוק את התנהגות הנגזרת בנקודות אלו:

$$x < -6, x > 6 \Rightarrow \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2} < 0, \quad -6 < x < 6 \Rightarrow \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2} > 0$$

קיבלנו שהנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי בנקודה  $x_1 = -6$  ומחיובי לשלילי בנקודה  $x_2 = 6$ .

מכאן שהפונקציה יורדת בקטעים:  $(-\infty, -6)$ ,  $(6, \infty)$  ועולה בקטע:  $(-6, 6)$ ,

והנקודות  $\pm 6$  הן נקודות קיצון מקומיות (בשאר הנקודות הנגזרת לא מחליפה סימן):  $x_1 = -6$  נקודת

מינימום מקומי ו- $x_2 = 6$  נקודת מקסימום מקומי.

4. מחליפה סימן באפס לכן  $x = 0$  היא נק' פיתול.  $f''(x) = \frac{x(72-4x^2)(12-x^2) + 4x^3(36-x^2)}{(12-x^2)^3}$ .

5. אסימפטוטות מאונכות. נבדוק את התנהגות הפונקציה בנקודות שבהם הפונקציה שואפת ל- $\pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{12}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{12}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{12}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{12}^+} f(x) = -\infty$$

כלומר יש לנו שתי אסימפטוטות מאונכות:  $x = \sqrt{12}$ ,  $x = -\sqrt{12}$ .

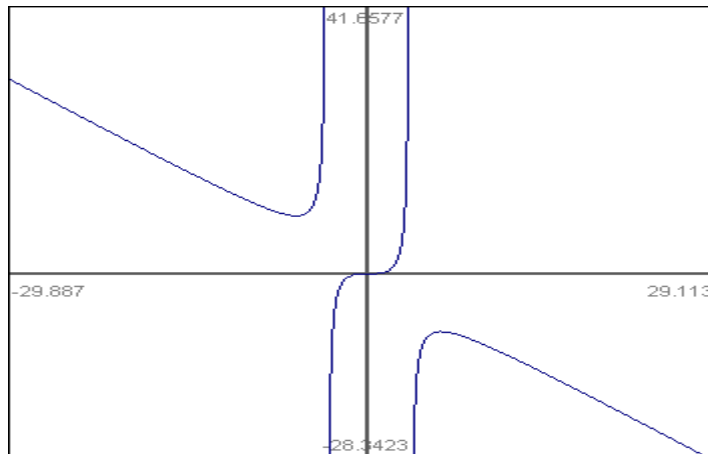
אסימפטוטות משופעות. א"מ ב- $\infty$  היא ישר  $y = ax + b$  באשר:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{12-x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{12-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 12x - x^3}{12-x^2} = 0$$

כלומר:  $y = -x$ . א"מ ב- $-\infty$  מחושבת באופן דומה כאשר  $x \rightarrow -\infty$ . גם כאן נקבל:  $y = -x$ .

6. התנהגות הפונקציה ב  $\pm\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{12-x^2} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .



7. גרף הפונקציה:

**תרגיל:** תהינה  $g$  ו- $f$  פונקציות גזירות פעמיים ברציפות בנקודה  $x_0$  ובנקודה  $g(x_0)$  בהתאמה, כך ש:  $g'(x_0), g''(x_0), f'(g(x_0)), f''(g(x_0)) > 0$ . הוכח כי הפונקציה המורכבת  $h = f \circ g$  עולה בסביבה של  $x_0$  וקמורה כלפי מעלה ב- $x_0$ .

**פתרון:**

כיוון שהנגזרת הראשונה והשנייה של  $f, g$  רציפות וחיוניות, קיימת סביבה של  $x_0$  בה עדיין מתקיים:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = \underbrace{f'(y)}_{>0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{>0} > 0$$

עפ"י כלל השרשרת:  $f'(y), g'(x), f''(y), g''(x) > 0$ .

כלומר  $h(x)$  עולה ממש שם (משפט). כמו כן ע"י גזירה של מכפלת פונקציות נקבל:

$$h''(x) = (f'(y) \cdot g'(x))' = \underbrace{f''(y)}_{>0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{>0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{>0} + \underbrace{f'(y)}_{>0} \cdot \underbrace{g''(x)}_{>0} > 0$$

ומכאן עפ"י משפט שנלמד בכיתה  $h(x)$  קמורה כלפי מעלה ב- $x_0$ .