מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 12 תשע"ח.

1. רשמו את כל החבורות האבליות מסדר $7^3 \cdot 2^2$ עד כדי איזומורפיזם.
פתרון:

$$\mathbb{Z}_{7^3} \times \mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{7^3} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

2. כמה חבורות אבליות יש מסדר $p_1^4 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2$, עבור p_1, p_2, p_3 ראשוניים שונים כלשהם?
פתרון:

צריך לספור לכל ראשוני בנפרד כמה חבורות אבליות יש מהחזקה שלו ובסוף להכפיל. מספר החבורות האבליות מסדר p^t עבור ראשוני כלשהו p הוא מספר הדרכים לכתוב את t כסכום של מספרים אי־שליליים. ראינו בכיתה שעבור $t = 2$ המספר הזה הוא 2, עבור $t = 3$ זה 3 , ועבור $t = 4$ המספר הוא 5. לכן סה"כ התשובה היא: $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

3. קבעו מי מהחבורות הבאות איזומורפיות אחת לשניה:

$$\mathbb{Z}_4 \times A_3 \times \mathbb{Z}_{75}, \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3, V_4 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

$$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}$$

פתרון:

ראשית, נשים לב ש$A_3 \cong \mathbb{Z}_3$, ו$V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

לכן:

$$\mathbb{Z}_4 \times A_3 \times \mathbb{Z}_{75} \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \cong V_4 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}$$

ואין יותר איזומורפיזמים בקבוצה.

4. מצאו את כל הסדרות ההרכב של $\mathbb{Z}_{18}$, וחשבו את הגורמים שלהם.
פתרון:

$$\{0\} \trianglelefteq 9\mathbb{Z}_{18} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}_{18} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{18}$$

והמנות הן: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3$ בהתאמה.

$$\{0\} \trianglelefteq 6Z_{18} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}_{18} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{18}$$

והמנות הן: $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ בהתאמה.

$$\{0\} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{18} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}_{18} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{18}$$

והמנות הן: $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2$ בהתאמה.

5. הוכיחו שלכל n, החבורה D_n פתירה.
פתרון:

נסתכל הסדרה: $D_n \trianglerighteq \langle\sigma\rangle \trianglerighteq \{e\}$. הגורמים הם $\mathbb{Z}_2$ ו$\mathbb{Z}_n$ שהם אבליים. לכן החבורה פתירה.

6. הוכיחו שכל חבורה מסדר $3^3 \cdot 11$ פתירה.
פתרון:

נסתכל על תת חבורות 3 ־ סילו. $r_3|11 \wedge r_3 \equiv 1 \mod 3$. לכן $r_3 = 1$, כלומר יש תת חבורת 3 ־ סילו יחידה, והיא נורמלית. נסמן אותה בP. היא מסדר 3^3, לכן $|Z(P)| = 3^2$.נסתכל על הסדרה הבאה:

$$\{e\} \trianglelefteq Z(P) \trianglelefteq P \trianglelefteq G$$

הגורמים שלה הם חבורה מסדר 11, חבורה מסדר 3 וחבורה מסדר 3^2, שכולן בהכרח אבליות. לכן G פתירה.

7. הוכיחו שחבורה פשוטה ולא אבלית אינה פתירה.
פתרון:

תהי G חבורה פשוטה ולא אבלית. הסדרה התת נורמלית היחידה היא $\{e\} \trianglelefteq G$ ת מכיוון שאין לG תת חבורות נורמליות. הגורמים שלה הם G, שהיא לא אבלית. לכן החבורה אינה פתירה.

8. אחת החבורות החשובות שעוד לא יצא לנו להיתקל בהם היא חבורת הקווטרניונים. היא מוגדרת באופן הבא:

$$Q = \langle -1, i, j, k | i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, (-1)^2 = 1 \rangle$$

זוהי חבורה בת 8 איברים: $\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$.

(א) כתבו את טבלת הכפל של החבורה.

$\cdot$	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	k	-1	i	j	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	$-k$	1	$-i$	$-j$	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	i	-1

(ב) הוכיחו שהיא לא אבלית
פתרון:
ניתן לראות למשל ש$k = (ij) \neq (ji) = -k$

(ג) הוכיחו שהיא לא איזומורפית לD_4. (למעשה, כל החבורות מסדר 8, עד כדי איזומורפיזם, הן החבורות האבליות, D_4 והקווטרניונים)
פתרון:
בD_4 יש שני איברים מסדר 4: σ, σ^3 . ואילו בקווטרניונים יש 6: $i, j, k, -i, -j, -k$.