אלגברה לינארית 1 ־ תרגול 1

10 ביולי 2020

1 הקדמה

אריאל ויצמן, $relweiz@gmail.com$.

ש.ב. ־ באתר $math - wiki$ יהיה קישור למערכת XI, שם מעלים את שיעורי הבית. אופן ההכנה וההגשה ־ כותבים את השאלה על דף. פותרים באופן מלא על דף, ואז מגישים למערכת, בהתאמה לדרישות המערכת. המערכת מחליפה בודק, והיא לא מחליפה פתרון מסורתי על דף.

בוחן ־ מתישהו במהלך הסמסטר, נודיע על כך בהמשך.

2 שדות

שדה זו קבוצה $\mathbb{F}$ עם תכונות מסויימות כמופיע בהרצאה, יש שם איברים שקראנו להם 0 שניטרלי לחיבור, 1 שניטרלי לכפל, ועוד כמה תכונות.

תרגילים:

1. הוכיחו שבשדה אין הופכי ל0.
פתרון: נניח בשלילה שיש לו הופכי, נסמנו $a \in \mathbb{F}$ אז $0 = 0 \cdot a = 1$, בסתירה לכך ש־ $0 \neq 1$.

2. יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו: לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים: $-(-a) = a$.
פתרון: צריך להוכיח שהנגדי של הנגדי של a, זה a בעצמו. ואכן, כיון ש־ $-a$ הנגדי של a נקבל $a + (-a) = 0$, מחילופיות החיבור נקבל גם $-a + a = a + (-a) = 0$. וכיון ש־ $-a + a = 0$ מקבלים ש־a הוא הנגדי של $-a$, ולכן $a = -(-a)$.

3. יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו שלכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים: $(-1) \cdot a = -a$. כלומר, אם מכפילים את a בנגדי של 1, מקבלים את הנגדי של a.
פתרון: $(-1)\cdot a = (-1)\cdot a + a + (-a) \underset{*}{=} (-1+1)\cdot a + (-a) = 0\cdot a + (-a) \underset{**}{=} -a$.
כאשר מעבר $*$ נובע מחוק הפילוג (כלל 7), ומעבר $**$ נובע מכך שכל דבר כפול 0 זה 0.

4. הוכיחו שבשדה מתקיים: $(-1)\cdot(-1)=1$.
פתרון: שילוב של $2,3$: לפי שאלה 3 $(-1)\cdot(-1)=-(-1)$, ואז לפי 2 $-(-1)=1$.

5. הוכיחו שבשדה יש רק איבר אחד שניטרלי לכפל.
פתרון: נניח b,c ניטרלים לכפל, ויהי $a\in\mathbb{F}$ אזי יש לו הופכי. כלומר, יש a^{-1} המקיים: $a\cdot a^{-1}$ הוא איבר היחידה הכפלי. לכן:

$$b=a\cdot a^{-1}=c$$

6. יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו שלכל a יש הופכי יחיד.
פתרון: נניח b,c הופכיים של a, אז:

$$b=b\cdot 1=b\cdot\underbrace{a\cdot c}_{a\cdot c=1}\underset{*}{=}(b\cdot a)\cdot c\underbrace{\;=\;}_{ba=1}1\cdot c=c$$

כאשר מעבר $*$ נובע מקיבוץ (אסוציאטיביות).

7. הוכיחו שבשדה יש צמצום לכפל. כלומר, אם $a\neq 0$ ונתון $ab=ac$, אז $b=c$.
פתרון: נתון $ab=ac$, ומכיון ש-$a\neq 0$ יש לו הופכי a^{-1}, נכפיל בהופכי בשני האגפים ונקבל:

$$b=1\cdot b=a^{-1}ab\underset{ab=ac}{=}a^{-1}ac=1\cdot c=c$$

2.1 שדה המרוכבים

הגדרת המרוכבים: $\mathbb{C}=\{a+bi : a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$. חיבור: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$. כפל: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$. איבר ניטרלי לכפל: $1=1+0i$. איבר ניטרלי לחיבור: $0=0+0i$.

תרגילים:

1. אם נשנה את פעולת הכפל להיות: $(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bdi$, האם זה יהיה שדה?
פתרון: במגוון דרכים, כמו למשל: היינו מקבלים $i^2=(0+1\cdot i)(0+1\cdot i)=0\cdot 0+1\cdot 1i=i$. דרך נוספת: $(1+0i)(0+1i)=0$ ואז יש מחלקי אפס בסתירה. אפשר גם להראות שיש בעייה עם הניטרלי לכפל...

2. הציגו את $z=\frac{5+2i}{2-3i}$ ע"י $z=a+bi$, וצינו מהם $Re(z),Im(z),\overline{z},|z|$.
פתרון: "הכפלה בצמוד":

$$z=\frac{5+2i}{2-3i}=\frac{5+2i}{2-3i}\cdot 1=\frac{5+2i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{(10-6)+(15+4)i}{4+9}=\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$$

ואז:

$$\overline{z}=\frac{4}{13}-\frac{9}{13}i, Re(z)=\frac{4}{13}, Im(z)=\frac{19}{13}, |z|=\sqrt{\frac{16+19^2}{13^2}}=\frac{\sqrt{377}}{13}$$

3. חשבו את $z=(1+\sqrt{3}i)^{5780}$

פתרון: נעביר לצורה קוטבית: $r=\sqrt{a^2+b^2}=2, \tan\theta=\frac{b}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$, ולכן $z=(2\text{cis}(\frac{\pi}{3}))^{5780}$, ולפי דה־מואבר:

$$z=2^{5780}\text{cis}(5780\cdot\frac{\pi}{3})=2^{5780}\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

4. פתרו את המשוואה: $z^5=3+4i$.

פתרון: שוב מעבירים לקוטבי: $z^5=5\text{cis}53.13^\circ$. ולכן אם נסמן $z=r\text{cis}\theta$ נקבל: $r=\sqrt[5]{5}, \theta=\frac{53.13+360k}{5}, k\in\mathbb{Z}$, ומספיק לקחת את $0,1,2,3,4$ כדי לקבל את כל הפתרונות:

$$z_0=\sqrt[5]{5}\text{cis}10.62$$

$$z_1=\sqrt[5]{5}\text{cis}82.62$$

$$z_2=\sqrt[5]{5}\text{cis}154.62$$

$$z_3=\sqrt[5]{5}\text{cis}226.62$$

$$z_4=\sqrt[5]{5}\text{cis}298.62$$

$$z_5=\sqrt[5]{5}\text{cis}370.62=\sqrt[5]{5}\text{cis}(10.62+360)=\sqrt[5]{5}\text{cis}10.62=z_0$$

5. הגדרה: פולינום עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$ ומשתנה x הוא: $a_0+a_1x+a_2x^2+a_nx^n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$, כאשר $a_k\in\mathbb{F}$. בהינתן פולינום $p(x)$, נוכל להציב איבר בשדה במקום x ולקבל איבר בשדה $p(\alpha)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\alpha^k$. שורש של הפולינום זה איבר $\alpha\in\mathbb{F}$ המקיים $p(\alpha)=0$. הוכיחו: אם $p(x)$ פולינום עם מקדמים ממשיים, ו־ $z\in\mathbb{C}$ שורש של p אז גם $\overline{z}$ שורש של p.

הוכח בהרצאה.

3 מערכת משוואות לינארית

מערכת משוואות לינארית ב־ n משתנים, המורכבת מ־m משוואות הינה מערכת מהצורה:

$$\begin{cases} a_{1,1}+\cdots+a_{1,n} &= b_1 \\ a_{2,1}+\cdots+a_{2,n} &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}+\cdots+a_{m,n} &= b_m \end{cases}$$

לצורך נוחות נייצג מערכת כזו במטריצה, שהיא מעין טבלה $m\times n$ (m שורות, n עמודות), כאשר המיקום ה־ i,j בטבלה מיועד עבור המקדם $a_{i,j}$. את $b_1,\dots,b_m$ שמים בוקטור עמודה נוסף, עם חוצץ מפריד:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

לדוגמא:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-z=-13 \\ 2x+3y-4z=5 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

הערה: אם נסמן את מטריצת המקדמים ב־ $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$, ונסמן את מטריצת התשובות $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, ונסמן את מטריצת הנעלמים ב־ $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. אז אפשר לרשום את המערכת בצורה:

$$Ax=b$$

בהינתן מערכת משוואות לינארית, אנחנו יודעים שמותר לעשות את הפעולות הבאות:

1. כפל שני אגפי משוואה בסקלר $a\neq 0$. לדוג': אם $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right)$ אז

ניתן לעשות את הפעולה:

$$A \to [2R_1 \to R_1] \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

2. להוסיף לשורה מסויימת כפל של שורה אחרת בסלקאר. לדוגמא:

$$A \to [-R_2 + R_3 \to R_3] \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \end{array}\right)$$

3. להחליף בין שורות. לדוגמא:

$$A \to [R_1 \leftrightarrow R_3] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

מה המטרה של הפעולות? אנחנו חותרים לדירוג המערכת.