שאלת אתגר 2 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

בשאלה זו נוכיח שאם יש לנו מערכת של אינסוף משוואות לינאריות, היא שקולה למערכת עם מספר סופי של משוואות לינאריות. כלומר, כדי לפתור אינסוף משוואות לינאריות מספיק לפתור מספר סופי של משוואות מתוך האוסף (אבל חשוב לדעת לבחור אותן).
יהי $\mathbb{F}$ שדה. לאורך כל התרגיל נניח שאנו עובדים עם מספר סופי של משתנים, $x_1, \dots, x_n$. כלומר, כל מערכת משוואות בתרגיל הזה היא מערכת של משוואות כשהנעלמים הם $x_1, \dots, x_n$.

הערה 1 (הערה מקדימה, לצורך הבנה). גם אם יש שורת אפסים, זה לא אומר בהכרח שיש אינסוף פתרונות. למשל, למערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש שורת אפסים ופתרון יחיד.

שאלה. נניח שיש לנו מערכת אינסופית של משוואות. ניקח מערכת של משוואות מתוך האוסף האינסופי שלנו

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_1 \end{cases}$$

כך שבצורה המדורגת של $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ אין שורות אפסים, ואם נוסיף עוד משוואה מהאוסף האינסופי למערכת שלנו – נקבל בצורה המדורגת החדשה שורת אפסים.

א. הסבירו מדוע בהכרח המערכת החדשה סופית.

ב. הוכיחו: אם קיים למערכת האינסופית פתרון, כל פתרון של המערכת הסופית הוא פתרון של המערכת האינסופית.

ג. נניח שלמערכת האינסופית אין פתרון. הוכיחו שצריך להוסיף משוואה אחת למערכת הסופית כדי שלמערכת הסופית החדשה לא יהיה פתרון.

ד. הסיקו: קיימת מערכת משוואות עם מספר סופי של משוואות, שאוסף פתרונותיה הוא אוסף הפתרונות של המערכת האינסופית.

הדרכה

א. הסתכלו על העמודות המובילות, כלומר על העמודות שיש בהן איבר מוביל, והראו שבהכרח $n \le m$. כיוון ש-n סופי, זה יוכיח ש-m סופי.

ב. קחו פתרון של המערכת הסופית, והוכיחו שהוא פתרון של כל משוואה אחרת מהאוסף האינסופי, על ידי כך שתוסיפו אותו למערכת הסופית ותדרגו.

ג. אם למערכת האינסופית אין פתרון, הסבירו מדוע ניתן בהכרח להוסיף משוואה אחת למערכת שלנו כך שתתקבל שורת סתירה בצורה המדורגת קנונית.

ד. שלבו את סעיפים ב' ו-ג' יחד.

הוכחה. הרעיון הוא כזה: אם שמים את כל המשוואות במטריצה אינסופית, אפשר לדרג אותה לצורה מדורגת קנונית. כיוון שבמטריצה יש מספר סופי של עמודות (כי יש מספר סופי של משתנים), אז יהיה מספר סופי של שורות שונות מאפס. כעת נפרמל:

א. נוכיח שיש לכל היותר $n+1$ משוואות באוסף הזה.
כדי לעשות זאת, נוכיח: בכל $n+2$ משוואות שניקח, בצורה המדורגת תהיה שורת אפסים (מדוע זה מספיק? חשבו).
נניח שיש לי $n+2$ משוואות. נשים את המשוואות במטריצה, ונדרג לצורה המדורגת קנונית. בכל עמודה יש לכל היותר איבר מוביל אחד (כולל בעמודה של הקבועים), ולכן יש לכל היותר $n+1$ איברים מובילים במטריצה. לכן, יש לכל היותר $n+1$ שורות במטריצה שיש בהן איבר מוביל. כיוון שבצורה המדורגת קנונית, אם בשורה אין איבר מוביל היא שורת אפסים, הרי שיש לפחות שורה אחת שהיא שורת אפסים. לכן סיימנו.

ב. כיוון שלא נוח לעבוד עם דברים אינסופיים אצלנו, נוכיח שוב טענה סופית: נוכיח שכל פתרון של המערכת הסופית שלנו הוא פתרון של כל משוואה מהמערכת האינסופית.
שוב – הפתרון הוא דירוג. נניח שיש לי משוואה נוספת מהמערכת האינסופית. נוסיף אותה למערכת הסופית שלנו, ונדרג לצורה מדורגת קנונית את m השורות הראשונות (כלומר, בלי המשוואה החדשה). לפי הבחירה של המערכת הסופית, אין שורת אפסים; אבל אם נפעיל על השורה האחרונה פעולות דירוג מתאימות, היא תתאפס (שוב, לפי הבחירה של המערכת הסופית). מכאן קל להשתכנע שכל פתרון של המערכת הסופית הוא גם פתרון של המשוואה שהוספנו.

ג. נניח שלמערכת האינסופית אין פתרון. נניח בשלילה שלמערכת הסופית יש פתרון; זה אומר שאם נדרג את

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

לא נגיע לשורת סתירה. נניח ש-x הוא פתרון של המערכת הזו. כיוון ש-x אינו פתרון של המערכת האינסופית, יש משוואה בתוך המערכת האינסופית שהוא לא פתרון שלה. נוסיף אותה למערכת, ונדרג קנונית. בהכרח נגיע לשורת סתירה (כי אנחנו יודעים שהמקדמים חייבים להתאפס, ואילו הקבוע גם היה מתאפס, x היא פתרון של המשוואה שהוספנו). לכן, אם נוסיף את המשוואה החדשה למערכת הסופית שלנו, נקבל שלמערכת לאחר ההוספה אין פתרון – כדרוש.

ד. משילוב שני הסעיפים הקודמים, המערכת הסופית שמצאנו אולי עם עוד משוואה אחת מספיקות.

□