לינארית 2 תרגול 13

23 ביוני 2021

משפט: מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אמ"ם A נורמלית + פ"א מל"ל. כלומר, P המלכסנת היא אוניטרית, $PP* = I$ או במילים אחרות $P^{-1} = P^*$, ולכן מקבלים

$$P * AP = D$$

P אוניטרית שקול לכך שעמודותיה בסיס או"נ. תמיד אפשר לקחת לכל מרחב עצמי בסיס או"נ ע"י תהליך גראם שמידט. כאשר A נורמלית אז מסתבר שמרחבים עצמיים של ע"ע שונים הינם או"ג, בסימונים: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \forall v \in V_{\lambda_1}, u \in V_{\lambda_2} : \langle v, u\rangle = 0$. ולכן איחוד הבסיסים זהו בסיס או"נ המורכב מוקטורים עצמיים, ואותו שמים בעמודות P.

הערה: מעל $\mathbb{R}$ מתקיים: A נורמלית + פ"א מל"ל אמ"ם A סימטרית.

תרגילים:

1. לכסנו או"ג את

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

פתרון: A סימטרית ולכן לכסינה או"ג. תחילה נלכסן רגיל:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 18)^2(\lambda - 27)$$

נמצא את המרחבים העצמיים:

$$V_{18} = N\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - s \\ t \\ s \end{pmatrix}\right\} = span\left\{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{27}=N\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&8&2\\-4&2&5\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}20&8&-16\\2&8&2\\-20&10&25\end{pmatrix}=\cdots$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

שימו לב שאכן המשפט עובד, ושני הו"ע של 18 או"ג לו"ע של 27.

מה שנותר לעשות זה גראם שמידט ל־ V_{18}:

$$w_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס או"ג המורכב מו"ע:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

נותר לנרמל את שלושתם:

$$B'=\left\{\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{-1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

ומקבלים:

$$P^tAP=\begin{pmatrix}18&&\\&18&\\&&27\end{pmatrix}$$

כאשר $P^t=P^{-1}$ מכיון שעמודות ושורות P הן בסיס או"נ, ואז $P^tP=PP^t=I$.

2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

(א) יהי $W \leq V$, ויהיו $v \in V, w \in W$. הוכיחו: $v-w \in W^{\perp}$ אמ"ם $w = \pi_W(v)$.
בכיתה הוכחתם ש־ $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$, מה שנותן את הכיוון משמאל לימין.
מימין לשמאל: ניקח $B = \{w_1, \ldots, w_k\}$ בסיס או"נ של W. קיימים $a_1, \ldots, a_k$ כך ש־

$$w = \sum_{j=1}^{k} a_j w_j$$

כעת מתקיים:

$$\forall i : 0 = \langle v - w, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \langle w, w_i \rangle =$$

ולכן:

$$\langle v, w_i \rangle = \langle w, w_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} a_j w_j, w_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} a_j \langle w_j, w_i \rangle = a_i$$

כלומר, קיבלנו:

$$\forall i : a_i = \langle v, w_i \rangle$$

ולכן:

$$w = \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle w_i = \pi_W(v)$$

(ב) תהי $T : V \to V$ העתקה הרמיטית $T = T^*$. ונניח שמתקיים: $T^2 = T$.
הוכיחו: T היא ההיטל האו"ג על התמונה, כלומר:

$$\forall v \in V : Tv = \pi_{Im(T)}(v)$$

פתרון: נסמן $Im(T) = W$, ונשתמש בפירוק $V = W \oplus W^{\perp}$. יהי $v \in V$ אז יש $w_1 \in W, w_2 \in W^{\perp}$ כך ש־

$$v = w_1 + w_2$$

מתקיים:

$$v - w_1 = w_2 \in W^{\perp}$$

ולכן לפי תרגיל קודם

$$w_1 = \pi_W(v)$$

לכן, מה שצ"ל:

$$Tv = w_1$$

נשים לב:

$$Tv = T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2)$$

טענה 1: $T(w_2) = 0$, וזה קורה מכיון ש- $\ker T = \ker T^* = (ImT)^\perp = W^\perp$, ולכן $w_2 \in \ker T$.

טענה 2: $T(w_1) = w_1$. $w_1 \in Im(T)$ לכן יש $u \in V$ כך ש- $Tu = w_1$, ולכן:

$$T(w_1) = T(T(u)) = T^2(u) = Tu = w_1$$

בסה"כ:

$$Tv = T(w_1) + T(w_2) = w_1 + 0 = w_1$$