אלגברה לינארית 2 תרגול 1

11 במרץ 2021

1 דטרמיננטה

1.1 הגדרה לפי תמורות ופעולות שורה

הגדרה: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז:

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

למשל עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

עבור S_3:

חישוב מכפלת איברים מתאימים	הסימן	התמורה
$0 \cdot 2 \cdot 5 = 0$	+	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$-(0 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0$	-	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$-(6 \cdot (-3) \cdot 5) = 90$	-	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$6 \cdot 1 \cdot 2 = 12$	+	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$0 \cdot (-3) \cdot (-1) = 0$	+	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$-(0 \cdot 2 \cdot 2) = 0$	-	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

, ובסה"כ: $\det A = 90 + 12 = 102$

השפעת פעולות שורה על הדטרמיננטה:

- אם B מתקבלת מA ע"י החלפת שורות $(R_i \leftrightarrow R_j)$ אז $|B| = -|A|$.
- אם B מתקבלת מA ע"י כפל שורה בסקלאר $(R_i \to \alpha R_i)$ אז $|B| = \alpha|A|$.
- אם B מתקבלת מA ע"י הוספת כפולת שורה לשורה אחרת $(R_i + \alpha R_j \to R_i)$ אז $|B| = |A|$.

תרגילים:

1. היעזרו בפעולות שורה לחשב את

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & 16 \\ -3 & -6 & 18 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & 16 \\ -3 & -6 & 18 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}R_1 \to R_1, -\frac{1}{3}R_2 \to R_2}{=} 2\cdot(-3)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -6 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix} =$$

$$-6\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = -6\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} = 222$$

2. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, ונגדיר $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

חשבו את $|A|$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{R_1 + \sum_{i>1} R_i \to R_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{\alpha+n-1}R_1 \to R_1}{=} (\alpha+n-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

נשים לב שמתחת ומעל לאלכסון הראשי יש לנו רק אחדות, וכמו כן בשורה הראשונה יש רק אחדות. לכן, לכל $i \geq 2$ נקבל שהפעולה $R_i - R_1 \to R_i$ תאפס לנו את כל השורה, למעט $A_{ii} = \alpha - 1$. בסהכ כל הפעולות הללו יתנו לנו:

$$= (\alpha + n - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = (\alpha + n - 1)(\alpha - 1)^{n-1}$$

1.2 תכונות הדטרמיננטה:

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^t| = |A|$
- A הפיכה אמ"ם $|A| \neq 0$ (בתרגיל הקודם, נקבל A הפיכה כאשר $\alpha \neq 1, 1-n$)
- אם $|A| \neq 0$ אז $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- לא בהכרח מתקיים: $|A+B| = |A| + |B|$
- דטרמיננטה של מטריצה משולשית זה מכפלת איברי האלכסון.

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) Aהפיכה אמ"ם AA^t הפיכה.
פתרון:

$$A \text{ invertible}$$

$$\iff$$

$$|A| \neq 0$$

$$\iff$$

$$|A| \cdot |A| \neq 0$$

$$\iff$$

$$|AA^t| = |A| \cdot |A^t| \neq 0$$

$$\iff$$

$$AA^t \text{ invertible}$$

(ב) אם n איזוגי , A אנטי־סימטרית מסדר n, אז A לא הפיכה.

פתרון:

$$|A| = |A^t| = |-A| \underset{\star}{=} (-1)^n |A| \underset{*}{=} -|A|$$

מעבר $\star$ נובע מכך שהוצאנו -1 מכל שורות המטריצה, וכל פעם שמוציאים צריך להכפיל בסקלאר שמוציאים. מעבר $*$ נובע מכך ש־n אי־זוגי. בסה"כ

$$2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

ולכן לא הפיכה.