תירגול 3

21 בנובמבר 2015

הגדרות

- Aהפרש B הינה הקבוצה המכילה את כל האיברים בA שאינם בB ומסומן $A\backslash B$.
מתקיים $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

- ההפרש הסימטרי בין שתי קבוצות A ו־B הוא אוסף האיברים הנמצאים באחת הקבוצות אך לא בחיתוך מסומן $A\Delta B$. מתקיים ש:

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

$$x \in A\mathbf{\Delta} B \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A)) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \bigcap B)$$

- נגדיר את הקבוצה האוניברסלית להיות המרחב שבו הקבוצות "חיות", קבוצה המכילה את כל הקבוצות. נסמן קבוצה זו ב־U.

- משלים של קבוצה A הוא הקבוצה $A^c = U \backslash A$.

1. יהיו A, B, C קבוצות. הוכיחו/הפריכו:
א. אם$A \nsubseteq B \bigcap C$ אז $(A/B) \bigcap (A/C) \neq \phi$
ב. אם $A \subseteq B$ אזי $A \bigcup (B/A) = B$
ג. אם $A \bigcap B = \phi$ אזי $P(A) \bigcap P(B) = \{\phi\}$
פיתרון

א. הפרכה: $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$.

ב.הוכחה: $(\subseteq)$:

$$\begin{array}{rcl} x & \in & A \bigcup (B/A) \\ & \Downarrow & \\ x \in A & \vee & x \in (B/A) \\ & \Downarrow & \\ x \in A & \vee & (x \in B \wedge x \notin A) \\ & \Downarrow & [A \subseteq B] \\ x & \in & B \end{array}$$

:$(\supseteq)$

$$\begin{array}{ccl} x & \in & B \\ if & & x \in A \\ & \Downarrow & \\ x & \in & A\bigcup(B/A) \\ if & & x \notin A \\ & \Downarrow & \\ x & \in & (B/A) \\ & \Downarrow & \\ x & \in & A\bigcup(B/A) \end{array}$$

דרך נוספת: נגדיר את B להיות הקבוצה האוניברסלית (אפשרי כי אנחנו מתעסקים בשני קבוצות A, B ושניהם מוכלות ב־B) אזי הטענה אומרת ש־ $A \cup A^c = B = U$ וזה כמובן מתקיים.

ג. נניח בשלילה ש־$P(A)\bigcap P(B) \neq \{\phi\}$, כיוון שהקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצת חזקה אזי החיתוך לא ריק ולכן בהכרח קיימת קבוצה $C \neq \phi$ כזו ש־$C \in P(A)\bigcap P(B)$ אזי:

$$\begin{array}{rcl} C & \in & P(A)\bigcap P(B) \\ & \Downarrow & \\ C \in P(A) & \wedge & C \in P(B) \\ & \Downarrow & \\ C \subseteq A & \wedge & C \subseteq B \\ & \Downarrow & [C \neq \phi] \\ A \cap B & \neq & \phi \end{array}$$

וזו סתירה.

2. נוכיח את חוק הפילוג $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ בעזרת טבלאות אמת. צריך להוכיח את השקילות הבאה: $p \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

נכתוב טבלת אמת עבור הביטוי:

q	p	s	$(q \vee s)$	$p \wedge (q \vee s)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge s)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge s)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

3. נוכיח את הפילוג מעל הפרש $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ על ידי טבלת אמת:
צריך להוכיח את השקילות הבאה: $p \wedge (q \wedge \neg s) \equiv (p \wedge q) \wedge \neg (p \wedge s)$
נכתוב טבלת אמת עבור הביטוי:

q	p	s	$\neg s$	$(q \wedge \neg s)$	$p \wedge (q \wedge \neg s)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge s)$	$\neg(p \wedge s)$	$(p \wedge q) \wedge \neg (p \wedge s)$
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	F	F	T	F

4. הוכח כי לכל A, B, C מתקיים: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

$$\begin{aligned} A \cap (B \triangle C) &= A \cap ((B \backslash C) \cup (C \backslash B)) = \\ (A \cap (B \backslash C)) \cup (A \cap (C \backslash B)) &= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ = (A \cap B) \triangle (A \cap C) & \end{aligned}$$

5. הוכח כי $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$$\begin{array}{ccc} (A \cap B) \cup (A \cap B^c) & = & A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A \\ & \uparrow & \\ & Distributive & \\ (A \cup B) \cap (A \cup B^c) & = & A \cup (B \cap B^c) = A \cup \phi = A \\ & \uparrow & \\ & Distributive & \\ & \Downarrow & \\ (A \cup B) \cap (A \cup B^c) & = & (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \end{array}$$

1. הוכיחו את חוקי דה־מורגן לקבוצות, כלומר:

$$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח קודם כל את השוויון הראשון.

ראשית, נראה הכלה לצד אחד: $(A\cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

כמו שביארנו, ניקח $x\in (A\cap B)^c$. לכן, לפי הגדרת המשלים:

$$\begin{gathered} x\notin (A\cap B) \\ \Updownarrow \\ (x\notin A)\vee(x\notin B) \\ \Updownarrow \\ (x\in A^c)\vee(x\in B^c) \\ \Updownarrow \\ x\in A^c\cup B^c \end{gathered}$$

ואם כן הוכחנו שמתקיים $(A\cap B)^c \subseteq A^c\cup B^c$. וגם $(A\cap B)^c \supseteq A^c\cup B^c$. (וכל הגרירות הם דו כיווניות).

2. הכללת את כללי דה מורגן ל־n קבוצות: הוכח כי לכל $2\leqslant n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$(A_1\cap\cdots\cap A_n)^c = A_1^c\cup\cdots\cup A_n^c$$

נוכיח באינדוקציה: על n:

בסיס האינדוקציה: $n=2$: חוקי דה מורגן.

נניח שהטענה מתקיימת עבור n מסויים אזי:

$$\begin{array}{rcl} (A_1\cap\cdots\cap A_{n+1})^c & = & ((A_1\cap\cdots\cap A_n)\cap A_{n+1})^c \\ =(A_1\cap\cdots\cap A_n)^c\cup A_{n+1}^c & = & A_1\cup\cdots\cup A_n^c\cup A_{n+1}^c \\ & \uparrow & \\ Induction & & Assumption \end{array}$$

דאליות איחוד חיתוך: הביטוי הדואלי לביטוי נתון הוא הביטוי המתקבל לאחר החלפות הבאות:

סימני האיחוד $\cup$ בסימני חיתוך $\cap$

סימני החיתוך $\cap$ בסימני האיחוד $\cup$

כל הופעה של ϕתוחלף ב־U

כל הופעה של Uתוחלף ב־ϕ

עקרון הדואליות של תורת הקבוצות אומר שלכל שוויון שמתקיים בין קבוצות מתקיים גם כן השוויון הדואלי.

דוגמא כפי שראינו בשיעור הקודם מתקיים:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

והביטוי הדואלי המתאים:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$