פתרון תרגיל 9

(1) (א) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{(n!)^2}{[(2n)!]} \cdot \frac{[(2n+2)!]}{[(n+1)!]^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)2}{n+1} = 4$$

(ב) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ $p \in \mathbb{R}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1$$

(2) (א) $\sum n^3 x^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^3} = 1 = R$$

$x = \pm 1$ $\pm n^3 \not\to 0$ לכן אין התכנסות.

(ב) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} x^n$

טור חסר. הטור השלם: $a_k = \begin{cases} 0 & \text{אי-זוגי} \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} & k=2n \end{cases}$.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}} = 0 = C \Rightarrow R = \infty$$

(ג) $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \underbrace{\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1}_{\text{מחזור}}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\cos\left(\tfrac{n\pi}{3}\right)\right|} \qquad \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{1/2}} \le \sqrt[n]{\left|\cos\left(\tfrac{n\pi}{3}\right)\right|} \le \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{1}}$$

$R = C = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ כאשר $x = \pm 1$ $\pm\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \not\to 0$ לכן התבדרות.

(3) $\sum n!\, x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = R$$

(ה) $\sum \frac{(\log n)^n}{n^{\log n}}$

$$\sqrt[n]{\frac{(\log n)^n}{n^{\log n}}} = \frac{\log n}{\left(e^{\log n \cdot \log n}\right)^{1/n}} = \frac{\log n}{e^{\frac{\log^2 n}{n}}} \xrightarrow{\ } \infty = C \quad R = 0$$

$\frac{\log^2 n}{n} (\to 0)$, מכאן $\to 1$

(3) עבור $x=1$ הטור מתבדר.
ומכאן $R \le 1$.
מתקיים עבור $|x| \le 1$ $\left|\frac{x^n}{p_n}\right| \le |x^n|$ $\sum |x|^n$ מתכנס ולכן גם שלנו.
עבור $x=-1$ $\frac{1}{p_n} \searrow 0$ ולפי לייבניץ מתכנס.

(4) (א) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(ב) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

הטורים עבור $\frac{1}{1-t}$ ו- $\frac{1}{1+t}$ הם:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n \quad \text{כאשר } |t|<1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad |x|<1.$$

נציב במקום t x^2 ונקבל

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

כאשר $|x| \ge 1$ האיבר הכללי אינו שואף ל-0 ולכן התבדרות.

1) לכל $x\in\mathbb{R}$ הטור מתכנס ל-$\sin x$ (יחידות הפיתוח).

(א) הטור מתכנס ב- $(-1001,1001)$ $\Leftarrow$ יש התכנסות במ"ש בכל תת-קטע סגור, ובפרט $[-1000,1000]$.

(ב) נרשום

$$S_1(x)=x$$

$$S_2(x)=x-\frac{x^3}{6}$$

$$S_3(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$S_4(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}$$

הסדרה $S_n(x)\to\sin x$ נקודתית.

לעומת זאת

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|S_n(x)-\underset{\sin x}{\overset{\|}{S(x)}}|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}-\sin x\right|\not\to 0$$

כי $\sin x$ חסום וניתן למשל לבחור $x=2k+n$ וערך משהו גדול.

אין התכנסות במ"ש.