פתרון תרגיל בית 11 אלגברה מופשטת 2

1. יהי R חוג קומוטטיבי.

(א) הוכיחו שלכל מודול חופשי M מעל R מתקיים $Ann_R(M)=0$, $Tor(M)=0$.

(ב) הוכיחו שאם כל אידיאל של R הוא חופשי כ-R-מודול, אז R הוא תחום ראשי.
פתרון: נקח שני איברים $a,b\in I$ אזי $ba-ab=0$ ולכן הם ת"ל- ולכן האידיאל חייב להיווצר ע"י איבר יחיד.
R הוא תחום כי לכל $a\neq 0$ $I=Ra\neq 0$, ואם $ab=0$ אז $Ib=0$ אבל I חופשי ולכן המאפס שלו הוא אפס- מה שנותן $b=0$ כדרוש.

2. יהי M מודול פשוט מעל R וI אידיאל שמאלי מינימלי של R. נתון ש $I\cdot M\neq 0$ הוכיחו כי $M\cong I$ בתור R-מודולים.
פתרון:
M מודול פשוט ולכן צקלי, נרשום $M=Ra$.
כעת נגדיר העתקה:

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & M \\ x & \mapsto & xa \end{array}$$

זהו אכן הומומורפיזם של מודולים (למה?).
התמונה היא IM שהוא תת-מודול של M כפי שהוכחתם בעבר. אבל M מודול פשוט ולפי הנתון $IM\neq 0$ ולכן בהכרח $IM=M$ וההעתקה היא על.
הגרעין הוא אידיאל המוכל בI אבל I הוא מינימלי. הגרעין לא שווה לI כי $IM\neq 0$, ולכן הוא בהכרח הוא אפס וההעתקה היא חח"ע.

3. נתבונן ב$\mathbb{F}[x]$-מודול $\mathbb{F}[x]^2/A\mathbb{F}[x]^2$ כאשר $A=\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$. מהו המימד של מודול זה כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$?
פתרון:

נרמל את A ונקבל $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ולכן $M \cong \mathbb{F}[x]/\langle x\rangle \oplus \mathbb{F}[x]/\langle 0\rangle \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}[x]$.

מכיוון ש $\mathbb{F}[x]$ הוא מ"ו ממימד אינסופי, גם M ממימד אינסופי.

4. חשב את החלק המפותל של החבורה $\mathbb{Z}^2/\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix} \right\rangle$.

פתרון :

נקח יוצרים $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ סטנדרטיים של המודול, קל לראות שמטריצת היחסים היא $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$.

נרמל אותה : (נשים לב שהgcd של הרכיבים הוא 3, ולכן נכפול במטריצה הפיכה לצורך הנירמול...)

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן המודול איזומורפי ל $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2/$ והחלק המפותל הוא $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית $\left\langle a,b,c \,\middle|\, \begin{array}{c} 2a+4b+4c=0 \\ -6a+6b+12c=0 \\ 10a-4b-16c=0 \end{array} \right\rangle$.

פתרון : מטריצת היחסים היא $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 12 & -16 \end{pmatrix}$, נרמל אותה ונקבל $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix}$.

ולכן הסדר הוא $2 \cdot 6 \cdot 12$.

6. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, נתבונן ב $V = \mathbb{Q}^3$ כמודול מעל $\mathbb{Q}[x]$ המושרה מA.

(א) נרמלו את מטריצת היחסים $xI - A$.

(ב) מצאו פולינומים $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש $V \cong \mathbb{Q}[x]/\langle f\rangle \oplus \mathbb{Q}[x]/\langle g\rangle$.

(ג) מצאו מטריצה $B \in M_3(\mathbb{Q})$ הצמודה לA כך שB היא סכום של שתי מטריצות מלוות.

פתרון : אחרי הרבה הרבה עבודה נקבל את הצורה הנורמלית $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (x-2)^2(x-3) \end{pmatrix}$.

ולכן לפי CRT מתקיים (כי הגורמים הם זרים) ש $V \cong \mathbb{Q}[x]/\left\langle (x-2)^2(x-3) \right\rangle \cong$ $\mathbb{Q}[x]/\left\langle (x-2)^2 \right\rangle \oplus \mathbb{Q}[x]/\left\langle (x-3) \right\rangle$.

A תהיה צמודה ל $\begin{pmatrix} 0 & -4 & \\ 1 & 4 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = C_{(x-2)^2} \oplus C_{x-3}$.

7. יהי (V,T) מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{R}[x]$. נתון שהפולינום המינימלי של T הוא אי-פריק ושקיים וקטור $v \in V$ כך ש $span_{\mathbb{R}}\{T^i v\} = V$.
הוכיחו כי לV אין תת מרחב T-אינווריאנטי לא טריוויאלי.
פתרון: לפי הנתון $V = \mathbb{R}[x]v$ הוא מודול צקלי.
בנוסף הפולינום המינימלי $m(x)$ שייך ל$Ann(v)$ ולכן $\langle m(x) \rangle \subseteq Ann(v)$,
אבל m אי-פריק בחוג ראשי ולכן יוצר אידיאל מקסימלי ולכן $Ann(v) = \langle m(x) \rangle$.
ולכן $V = \mathbb{R}[x]v \cong \mathbb{R}[x]/\langle m(x) \rangle$.
בצורה הזאת אפשר לראות שאין לV תת-מודולים לא טריוויאלי, כלומר אין לו תת-מרחבים T-אינווריאנטים לא טריויואלים.

8. יהי (V,T) מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{Q}[x]$ כך ש $T: V \to V$ הפיך ומקיים $T^{-1} = T^2 + T$.

(א) הוכח שהמימד של V מתחלק ב3 .
פתרון:
מתקיים $T^3 + T^2 - I = 0$ ולכן T מאפס את הפולינום $x^3 + x^2 - 1$.
זהו פולינום אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$(למה?) ולכן זהו הפולינום המינימלי של T.
מכיוון שהמימד הוא מכפלת הדרגות של הגורמים האינווריאנטים (שהפולינום המינימלי הוא אחד מהם) אז 3 מחלק את המימד.

(ב) נתון כעת שהמימד של V הוא 3, מצא את הצורה הרציונלית קנונית של T .
פתרון:
מכיוון שהמימד הוא 3 והדרגה של הפולינום המינימלי היא 3 , אז כל שאר הגורמים האינווריאנטים הם 1ים.
ולכן הצורה הרציונלית קנונית היא המטריצה המלווה של הפולינום המינימלי:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. יהי p מספר ראשוני, הוכיחו כי המטריצות הבאות מגודל $p \times p$ צמודות מעל $\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נשים לב שהמטריצה הראשונה היא מטריצה מלווה של $(x-1)^p = x^p - 1$ (השיוויון הזה נכון כי אנחנו במאפיין p),

ושהמטריצה השנייה היא צורת ג'ורדן שמתאימה ל$(x-1)^p$.

כלומר מדובר על 2 צורות שמתקבלות מאותו גורם אינווריאנטי יחיד. ולכן הן בהכרח צמודות.