מבוא לאלגברה לינארית 89-119,
מועד ב', סמסטר א' תשע"ט

- מרצה: אחיה בר־און. מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
- קורס: מבוא לאלגברה לינארית $89119 - 01$.
- תאריך: י"ז אדר א' התשע"ט, 22/02/2019.
- משך המבחן: 3 שעות.
- חומר עזר: מחשבון.
- הוראות: לפניכם 5 שאלות ו 10 סעיפים (כל שאלה בת שתי סעיפים). יש לענות על כולם. <u>על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.</u>
- ניקוד: כל סעיף 10 נקודות.
  ככל אצבע, דרך נכונה ומנומקת שווה 5 נקודות ותשובה סופית נכונה המתבססת על דרך נכונה שווה 5 נקודות.
  5 נקודות ירדו על תשובה סופית ללא דרך מנומקת וכל שכן ש 5 נקודות ירדו על תשובה סופית שגויה (ללא תלות בסיבת הטעות).

בהצלחה!

.1

(א) נתונה מערכת משוואות לינארית התלויה בפרמטר a

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -1 \\ 2x_1+x_2+ax_3 &= 1 \\ 3x_1+x_2+x_3 &= a \end{aligned}$$

מצאו ונמקו לאילו ערכי a למערכת פתרון יחיד? לאילו ערכי a למערכת אינסוף פתרונות? ולאילו ערכי a למערכת אין פתרון?

פתרון: נייצג את המערכת בעזרת מטריצה ונדרג אותה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 3 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & a+3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 2-2a & a-3 \end{array}\right)$$

במידה ו $2-2a\neq 0$, נקבל כי זוהי צורה מדורגת ואין משתנים חופשיים ואין שורת סתירה ולכן יש פתרון יחיד. זה קורה עבור $a\neq 1$.

עבור $a=1$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן אין פתרון.

(ב) מצאו ונמקו לאילו ערכי a למערכת פתרון יחיד? לאילו ערכי a למערכת אינסוף פתרונות? ולאילו ערכי a למערכת אין פתרון?

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -(2x_1+x_2+ax_3) \\ 3x_1+x_2+x_3 &= a \end{aligned}$$

פתרון: זוהי מערכת משוואות עם 2 משוואות ו 3 נעלמים ולכן לא יתכן פתרון יחיד. לכל $a\neq 1$ למערכת של סעיף א יש פתרון ולכן גם למערכת של סעיף ב' שהרי אם מתקיים

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -1 \\ 2x_1+x_2+ax_3 &= 1 \\ 3x_1+x_2+x_3 &= a \end{aligned}$$

אז בפרט מתקיים

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -(2x_1+x_2+ax_3) \\ 3x_1+x_2+x_3 &= a \end{aligned}$$

ולכן במקרה של $a\neq 1$ יש אינסוף פתרונות למערכת של סעיף ב'. במקרה של $a=1$ נקבל את המערכת

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3 &= 0 \\ 3x_1+x_2+x_3 &= 1 \end{aligned}$$

שבייצוג מטריצי היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ ולכן גם במקרה זה יש אינסוף פתרונות (קיבלנו צורה מדורגת ללא שורת סתירה ועם המשתנה השלישי שהוא משתנה חופשי).

2. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

(א) מצאו בסיסים למרחבים $N(A), C(A), R(A)$. (כאשר $N(A)$ מרחב האפס של A, $C(A)$ מרחב העמודות של A, $R(A)$ מרחב השורות של A).

פתרון: נדרג את A ונמצא בסיסים למרחבים לפי אלגוריתם שראינו בהרצאה:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ע"י הצבת t, s במשתנים החופשיים. בנוסף, שורות שונות מאפס בצורה מדורגת הן בסיס למרחב השורות ולכן

$$R(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ובסיס למרחב העמודות הן עמודות המטריצה A שבצורה המדורגת יש בהם ציר, כלומר (עמודות $1, 3$ הן עמודות שיש בהם ציר בצורה המדורגת)

$$.C(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

כל המרחבים בפתרון מוצגים כ $span$ של בסיסים.

(ב) נסמן v_1, v_2, v_3, v_4 את עמודות A. האם הם בסיס ל $\mathbb{R}^3$? אם כן, הוכיחו. אם לא, מצאו וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ שאינו שייך ל $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

פתרון: נראה כי הם לא קבוצה פורשת. האם $C(A) = \mathbb{R}^3$? התשובה היא לא כיוון ש $\dim C(A) = 2$ ואילו $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. כדאי למצוא v כנדרש בשאלה, נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ששורותיה הם בסיס ל $C(A)$. במילים אחרות $C(A)=R(B)$ ונמצא $v\notin R(B)$ ע"י דירוג המטריצה B (מרחב השורות נשמר בדירוג)

$$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1 & -2 & -5\\ -3 & 1 & 2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1 & -2 & -5\\ 0 & -5 & -13\end{array}\right).$$

מכאן רואים שאין ציר בעמודה השלישית ולכן הוקטור $v=\left(\begin{array}{c}0\\ 0\\ 1\end{array}\right)$ בת"ל עם הוקטורים $v_3=\left(\begin{array}{c}-1\\ 2\\ 5\end{array}\right),v_1=\left(\begin{array}{c}-3\\ 1\\ 2\end{array}\right)$ ולכן

$$v\notin span\left\{v_1,v_3\right\}=C(A)=span\left\{v_1,v_2,v_3,v_4\right\}$$

3. נתונה

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right)\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

התלויה בפרמטר a.

(א) מצאו $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכי a המטריצה A הפיכה.
פתרון: נחשב

$$\left|\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right)\right|=\left|\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -1\\ 0 & 1-2a & 2+a\\ 0 & -5 & 3\end{array}\right)\right|=\left|\left(\begin{array}{cc}1-2a & 2+a\\ -5 & 3\end{array}\right)\right|=$$

$$3\left(1-2a\right)+5\left(2+a\right)=13-a$$

בנוסף, A הפיכה אמ"מ $|A|\neq0$ אמ"מ $13-a\neq0$ אמ"מ $a\neq13$. ולכן רק עבור $a=13$ המטריצה אינה הפיכה ובכל מקרה אחר היא כן הפיכה.

(ב) נגדיר $B=\left(\begin{array}{ccc}1 & 5 & 6\\ 0 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right)$.
מצאו עבור אילו ערכי a הדרגה של BAB^t היא 2.
פתרון: כיוון ש $|B|=10$ (היא מטריצה משולשית) אזי היא הפיכה ו B^t (כי יש להם אותה דטרמיננטה). כיוון שכפל במטריצה הפיכה אינה משנה דרגה נקבל כי $\text{rank}(BAB^t)=\text{rank}(A)$ והשאלה היא מתי $\text{rank}(A)=2$. עבור $a\neq13$ המטריצה הפיכה ולכן $\text{rank}(A)=3$. עבור $a=13$ המטריצה אינה הפיכה ולכן $\text{rank}(A)<3$. כיוון שעמודות $2,3$ של A בת"ל נקבל כי $2\leq\text{rank}(A)$ וביחד נקבל כי $\text{rank}(A)=2$. לסיכום $\text{rank}(A)=2$ רק אם $a=13$.

4. נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-7&-3&-6\\0&-4&0\\3&3&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

(א) הוכיחו כי A לכסינה ומצאו מטריצה P הפיכה ו D אלכסונית כך ש $P^{-1}AP=D$.

פתרון: ראשית נמצא את הפולינום האופיני של A:

$$p_A(x)=\left|\begin{pmatrix}x+7&3&6\\0&x+4&0\\-3&-3&x-2\end{pmatrix}\right|=(x+4)\left|\begin{pmatrix}x+7&6\\-3&x-2\end{pmatrix}\right|=$$

$$(x+4)\left[(x+7)(x-2)+18\right]=(x+4)\left[x^2+5x+4\right]=(x+4)(x+4)(x+1)$$

ולכן הע"ע הם $-4,-1$. נחשב את המרחבים העצמיים:

$$A-(-1)I=\begin{pmatrix}-6&-3&-6\\0&-3&0\\3&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-6&-3&-6\\0&-3&0\\0&1.5&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}-6&-3&-6\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-6&0&-6\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-1}=N(A-(-1)I)=\left\{\begin{pmatrix}-t\\0\\t\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בנוסף

$$A-(-4)I=\begin{pmatrix}-3&-3&-6\\0&0&0\\3&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&-3&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-4}=N(A-(-4)I)=\left\{\begin{pmatrix}-s-2t\\s\\t\end{pmatrix}:\ t,s\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בסה"כ קיבלנו 3 ו"ע בת"ל ואם נשים אותם במטריצה P, כלומר

$$P=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

(ב) הוכיחו כי $P^{-1}A$ הפיכה (כאשר P המטריצה שמצאתם בסעיף הקודם) ומצאו את ההופכית שלה (כלומר, מצאו מטריצה B כך ש $P^{-1}AB=I=BP^{-1}A$).

פתרון: ראינו כי $P^{-1}AP=D$ ומכאן ש A דומה ל D ולכן יש להם אותה דט'. מכך ש $|A|=|D|=(-4)(-4)(-1)=-16\neq 0$ נסיק כי A הפיכה וגם $P^{-1}A$ הפיכה כמכפלה של הפיכות. בנוסף, נכפיל את השיוון $P^{-1}AP=D$ ב D^{-1} מימין ונקבל כי $P^{-1}APD^{-1}=I$ ומכאן ש $\left(P^{-1}A\right)^{-1}=PD^{-1}$. נחשב:

$$A^{-1}P=PD^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&-\frac{1}{4}\\-1&-\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$$

כנדרש.

5. נתונים הוקטורים $v=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו מטריצות אלמנטריות $E_1,\ldots,E_k$ (k טבעי ונתון לבחירתכם) כך ש

$$E_k\cdots E_1u=v.$$

פתרון: אם נבצע

$$u\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\xrightarrow{5R_1\to R_1}\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}=v$$

ולכן נקודד את הפעולות בעזרת מטריצות אלמנטריות מתאימות. בצורה מפורשת

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

מקודדת את הפעולות הדירגו שעשינו ולכן $E_3E_2E_1u=v$ כנדרש.

(ב) מצאו וקטור w שונה מאפס כך ש $span\left\{v,\pi_w(v)\right\}\neq span\left\{v,w\right\}$ (כאשר $\pi_w(v)$ הוא ההטלה של v על w).

פתרון: כיוון שלכל w קיים α כך ש $\pi_w(v)=\alpha w$ נקבל $span\left\{v,w\right\}\neq$

$span\{v,\alpha w\}$ אמ"מ $\alpha=0$. בגלל ש $\alpha=\frac{\langle v,w\rangle}{|w|^2}$ נחפש w המקיים $\langle v,w\rangle=0$.
רואים כי $w=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ יקיים זאת ואכן

$$span\{v,\pi_w(v)\}=span\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

שמימד 1 ואילו

$$span\{v,w\}=span\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מימד 2 (כי $\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל) ולכן מתקיים כי $span\{v,w\}\neq span\{v,\pi_w(v)\}$ כנדרש.