בס"ד

משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240

תרגילים 7 - פתרונות

הערה כללית: הדבר ראשון, כאשר מקבלים מערכת מד"ר עם מקדמים קבועים, הוא לחשב את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה. אני השתמשתי במייפל לעשות את זה ולכן לא כותב את החישובים. כמובן, חשוב לדעת איך לעשות את זה ידנית! כמו כן אני מקצר קצת בכמה חישובים טכניים אחרים - אבל אני מקווה שברור.

1. פתור את המערכות הבאות:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

הראשון:

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

השני:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= C \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+2i)t} + C^* \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-2i)t} \\
&= e^{-t} \left(\cos 2t \left(C \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right. \\
&\quad \left. + i \sin 2t \left(C \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} - C^* \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= e^{-t} \left(\cos 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \\ A \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A \\ B \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

כאשר $A = C + C^*$, $B = i(C - C^*)$.

השלישי: יש ערך עצמי כפול -1 ורק ווקטור עצמי אחד $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. מחפשים פתרון בצורה

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 t \\ A_2 + B_2 t \end{pmatrix} e^{-t}$$

ומוצאים שזה מקיים את המשוואה אם

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 t \\ -A_1 + \frac{1}{2}B_1 - B_1 t \end{pmatrix} e^{-t}$$

---

2. פתור את המערכות הבאות:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= \begin{pmatrix} -1 & 22 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 26 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{y}\end{aligned}$$

הראשון:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

השני:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C \begin{pmatrix} 22-3i \\ -5+2i \\ 29 \end{pmatrix} e^{(-1+2i)t} + C^* \begin{pmatrix} 22+3i \\ -5-2i \\ 29 \end{pmatrix} e^{(-1-2i)t} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + e^{-t}\left(\left(C \begin{pmatrix} 22-3i \\ -5+2i \\ 29 \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} 22+3i \\ -5-2i \\ 29 \end{pmatrix}\right)\right) \cos 2t + \\ &\quad \left(C \begin{pmatrix} 22-3i \\ -5+2i \\ 29 \end{pmatrix} - C^* \begin{pmatrix} 22+3i \\ -5-2i \\ 29 \end{pmatrix}\right)\Bigg) i \sin 2t\Bigg) \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + e^{-t}\left(\left(\begin{pmatrix} 22A-3B \\ -5A+2B \\ 29A \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 22B+3A \\ -5B-2A \\ 29B \end{pmatrix} \sin 2t\right)\right)\end{aligned}$$

---

3. מצא את פתרון המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

עם תנאי התחלה

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי של ההומוגני:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

לפתרון של האי הומוגני ניתן לנחש או להשתמש בשיטה ווריאציית מקדמים.
ניחוש: ננסה

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

מציבים ורואים שצריך לבחור את $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ כך ש-

$$\begin{aligned} & e^t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left(e^t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 8\beta \\ 2\alpha - \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma + 8\delta \\ 2\gamma - \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = \beta = -\frac{1}{6}, \qquad \gamma = -\frac{8}{15}, \qquad \delta = -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה האי-הומוגנית הוא

$$y = -\frac{e^t}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

לפתרון זה

$$y(0) = \begin{pmatrix} -2C_1 + 2C_2 - \frac{7}{10} \\ C_1 + C_2 - \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

ולכן ברצוננו לבחור $C_1 = -\frac{37}{120}$, $C_2 = \frac{13}{24}$ והפתרון הסופי הוא

$$y = -\frac{e^t}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{37e^{-5t}}{120} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13e^{3t}}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

השיטה השנייה למצוא את הפתרון הפרטי: ווריאציית מקדמים. אם Y הוא פתרון מטריצי של המערכת $Y' = A(t)Y$ אזי הפתרון של המערכת $y' = A(t)y + b(t)$ הוא

$$y = Y \left(\int Y^{-1} b(t)\ dt \right)$$

כאן:

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{pmatrix} -2e^{-5t} & 2e^{3t} \\ e^{-5t} & e^{3t} \end{pmatrix} \\
b &= \begin{pmatrix} e^{t} \\ 1 \end{pmatrix} \\
Y^{-1}b &= -\frac{e^{2t}}{4} \begin{pmatrix} e^{3t} & -2e^{3t} \\ -e^{-5t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{5t} - e^{6t} \\ 2e^{-3t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \\
\int Y^{-1}b(t)\ dt &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{5t} - \frac{1}{6}e^{6t} \\ -\frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \\
Y\left(\int Y^{-1}b(t)\ dt\right) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2e^{-5t} & 2e^{3t} \\ e^{-5t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{5t} - \frac{1}{6}e^{6t} \\ -\frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{e^{t}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כמו קודם (תעשו את הכפל המטריצי - זה באמת עובד!)

---

4. מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ע"עים וו"עים של המטריצה

$$3, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad 3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

זה מקרה שיש ע"ע כפול אבל עם שני ו"עים בת"ל קשורים.
הפתרון:

$$y = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

אני חושב שהדרך הפשוטה ביותר לקבל את זה היא שיטת הניחוש - יש לשים לב שאי-הומוגניות במשוואה היא צירוף ליניארי של שניים מתוך שלושת הווקטורים העצמיים של המטריצה, ולכן ניתן לכתוב את הפתרון הפרטי גם כצירוף ליניארי של שני ווקטורים אלה.

---

5. (א) העזר במשפט ליוביל למצוא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

(λ קבוע), החל מהעובדה ש-

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

הוא פתרון פרטי.

(ב) העזר במשפט ליוביל למצוא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} f(t) & sf(t) \\ g(t) & sg(t) \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

(s קבוע, $f(t), g(t)$ פונקציות נתונות), החל מהעובדה ש-

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא פתרון פרטי.

משפט ליוביל: אם $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ הם n פתרונות של המערכת של n משוואות $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ אזי

$$D(t) = \det(\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n)$$

מקיימת את המשוואה

$$D(t)' = \mathrm{Tr}(A(t))D(t)$$

כלומר

$$D(t) = D(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))ds\right)$$

(א) נכתוב $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$ ונחפש פתרון שני בצורה $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$. לפי ליוביל $D(t) = e^{\lambda t} b(t)$ מקיים $D'(t) = 2\lambda D(t)$ כלומר $D(t) = e^{2\lambda t} D(0)$. ולכן $b(t) = e^{\lambda t} b(0)$.
(זה דווקא טריביאלי מהמשוואה, אבל בכל אופן יפה לראות איך זה נובע מליוביל.)
מהמשוואה

$$a'(t) = \lambda a(t) + b(t) = \lambda a(t) + e^{\lambda t} b(0)$$

למשוואה הזאת יש פתרון כללי

$$a(t) = (a(0) + tb(0))\, e^{\lambda t}$$

לכן פתרון כללי:

$$\mathbf{y}(t) = a(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + b(0) \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

(ב) נכתוב $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$ ונחפש פתרון שני בצורה $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$. לפי ליוביל $D(t) = -sb(t) - a(t)$ מקיים $D'(t) = (f(t) + sg(t))\, D(t)$ כלומר

$$D(t) = e^{\int_0^t (f(t') + sg(t'))dt'} D(0)$$

ולכן

$$sb(t) + a(t) = e^{\int_0^t (f(t') + sg(t'))dt'} (sb(0) + a(0))$$

מהמשוואה

$$a'(t) = f(t)\,(sb(t) + a(t)) = f(t) e^{\int_0^t (f(t') + sg(t'))dt'} (sb(0) + a(0))$$

ולכן

$$a(t) = a(0) + (sb(0) + a(0)) \int_0^t f(t'') e^{\int_0^{t''} (f(t') + sg(t'))dt'}\ dt''$$

כמו כן

$$b(t) = b(0) + (sb(0) + a(0)) \int_0^t g(t'') e^{\int_0^{t''} (f(t') + sg(t'))dt'}\ dt''$$

וביחד יש את הפתרון הכללי:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} + (sb(0) + a(0)) \int_0^t \begin{pmatrix} f(t'') \\ g(t'') \end{pmatrix} e^{\int_0^{t''} (f(t') + sg(t'))dt'}\ dt''$$
