המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 05 – סמסטר ב' תשע"ח, 12.07.18 מבחן מועד א'
המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר בר-און, אחיה בר-און

הנחיות:

- יש **לבחור 4 מתוך 5** שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל **שלא בחרתם**.
- כל שאלה שווה 20 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

השאלות:

1. א. נניח $C_1, C_2, \cdots, C_n$ כיסוי סגור של מרחב טופולוגי X ונתונות פונקציות רציפות $f_i : C_i \to Y, \mathrm{i} \in \{1, \cdots, \mathrm{n}\}$ שמזדהות על החיתוכים (כלומר $f_i(C_i \cap C_j) = f_j(C_i \cap C_j)$). הוכיחו שפונקציה טבעית $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to Y$ המוגדרת חד משמעית ע"י הפונקציות f_i היא רציפה.
ב. נניח $f : X \to Y$ רציפה ו Y האוסדורפי. הוכיחו סגירות של הגרף $Gr(f)$ במרחב המכפלה $X \times Y$.

2. א. תנו דוגמה של פונקציה רציפה ועל $f : X \to Y$ שהיא לא פונקצית מנה.
ב. יהי X מרחב מנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מזיהוי של כל הנקודות $x \in \mathbb{R}$ עם $1 \leq |x|$.
הוכיחו ש X הומאומורפי למרחב $Y = \{\mathrm{z} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathrm{z}\| = 5\}$.

3.
א. הוכיחו את המשפט הבא: תמונה רציפה של מרחב ספרבילי גם ספרבילי.
ב. הוכיחו שלא קיים מרחב מטרי (X, d) קומפקטי ושיכון איזומטרי $\mathrm{f} : (\mathbb{R}, d_\Delta) \to (X, d)$ כאשר $d_\Delta(x, y) = 1 \quad \forall\, x \neq y$.

4. נניח $\mathbb{R}_s$ קו Sorgenfrey (תזכורת: טופולוגיה שלו τ_s מוגדרת על $\mathbb{R}$ כך:
$\tau_s := \{\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R} : \mathrm{x} \in \mathrm{A} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad [\mathrm{x}, \mathrm{x} + \varepsilon) \subseteq \mathrm{A}\}$).
א. חשבו את השפה $\partial(A)$ של תת קבוצה $A = (2,4) \cup \mathbb{N}$ במרחב $\mathbb{R}_s$.
ב. הוכיחו ש $\mathbb{R}_s$ הוא בעל תכונת $T_{3.5}$ אבל לא מטריזבילי.

5. א. הוכיחו את משפט *Tychonoff*: מכפלה טופולוגית $\prod_{i \in I} X_i$ קומפקטית אם ורק אם כל גורם X_i קומפקטי (מותר להשתמש בלמה של Alexander).
ב. תנו דוגמה של מרחב מטרי ספרבילי שיש בו 2 מרכיבי קשירות ו 3 מרכיבי קשירות מסילתיים.

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):
תנו דוגמה של מרחב מטריזבילי X כך ש X קשיר מסילתית אבל קיימת בו נקודה z וסביבה $U \in N(z)$ כך שלכל סביבה $V \in N(z)$ עם $V \subseteq U$ מתקיים: V לא קשיר.

בהצלחה !