משוואת החום בקטע סופי עם תנאי שפה לא הומוגניים

הערה:

תיקון בנוגע ל – midpoint שראינו בהרצאה:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

דוגמה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \dfrac{x(1+\pi t)}{\pi} \\ u(x,0) = 2\left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}\right) \\ u(0,t) = 2 = a(t) \\ u(\pi,t) = t = b(t) \end{cases}$$

הערה: אם תנאי השפה לא הומוגניים, נגדיר –

$$u = v + w$$

כאשר v לוקחת מ – u המקורית א תנאי השפה. נקרא ל – v פונקציית תיקון ואז נגדיר את הבעיה על $w = u - v$. היתרון של – w יש תנאי שפה הומוגניים.

$$v(x,t) = \frac{x}{L}(b(t) - a(t)) + a(t)$$

$$\boxed{v(x,t) = \frac{x}{\pi}(t-2) + 2}$$

כעת:

$$w_t = u_t - v_t = u_t - \frac{x}{\pi}$$

$$w_{xx} = u_{xx} - \underbrace{v_{xx}}_{=0} = u_{xx}$$

לכן:

$$w_t - w_{xx} = u_t - \frac{x}{\pi} - u_{xx} = (u_t - u_{xx}) - \frac{x}{\pi} = \frac{x}{\pi} + xt - \frac{x}{\pi}$$

$$\boxed{w_t - w_{xx} = xt}$$

$$\boxed{w(0,t) = w(\pi,t) = 0}$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 2\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) - \left(-\frac{2x}{\pi} + 2\right) = 2 - \frac{2x^2}{\pi^2} + \frac{2x}{\pi} - 2 = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x)$$

<u>סיכום:</u>

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = xt \\ w(x,0) = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x) \\ w(0,t) = 0 \\ w(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

כעת w עם תנאי שפה הומוגניים. נכתוב את w לפי:

$$w = w^h + w^p$$

כאשר:

$$\begin{cases} w_t^h - w_{xx}^h = 0 \\ w^h(x,0) = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x) \\ w^h(0,t) = w^h(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t^p - w_{xx}^p = xt \\ w^p(x,0) = 0 \\ w^h(0,t) = w^h(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

נפתור את ההומוגני קודם (ראינו כבר):

$$w^h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}$$

נשים לב כי $L = \pi$, $c = 1$ ולכן:

$$w^h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)\, e^{-n^2 t}$$

כעת מתנאי ההתחלה:

$$w^h(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x)$$

לכן:

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x)\sin(nx)\, dx = \cdots = \frac{8}{\pi^3 n^3} - \frac{8(-1)^n}{\pi^3 n^3}$$

נרשום לפי:

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{16}{\pi^3 n^3}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

ולכן:

$$w^h(x,t) = \frac{16}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin(nx)\,e^{-n^2t}$$

כעת נפתור את הפתרון הפרטי:

$$w^p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\cdot\sin(nx)$$

$$xt = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin(nx)$$

נחשב:

$$q_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xt\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}t\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$\boxed{q_n(t) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}t}$$

כעת נבדוק את הקיום של תנאי השפה:

$$w^p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\cdot\sin(nx)$$

$$w^p(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(0) = 0$$

$$w^p(\pi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(\pi) = 0$$

כעת נציב את הניחוש שלנו במד"ח:

$$w_t - w_{xx} = xt$$

נגזור:

$$w_t^p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n'(t)\cdot\sin(nx)$$

$$w_{xx}^p = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 h_n(t)\cdot\sin(nx)$$

לכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[h_n'(t)+n^2h_n(t)]\cdot\sin(nx)=xt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}t\sin(nx)$$

נקבל:

$$\forall n:h_n'(t)+n^2h_n(t)=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}t$$

כעת תנאי ההתחלה של המד"רים יהיו:

$$w^p(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(0)\cdot\underbrace{sin(nx)}_{\substack{\neq 0\\ \text{כי הן פונקציות עצמיות}}}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\forall n:h_n(0)=0}$$

קיבלנו:

$$\begin{cases}h_n'(t)+n^2h_n(t)=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}t\\ h_n(0)=0\end{cases}$$

נכתוב את פתרון המד"ר לפי:

$$h_n(t)=h_n^h(t)+h_n^p(t)$$

נפתור את החלק ההומוגני:

$$h_n^{h\prime}(t)+n^2h_n^h(t)=0$$

$$k+n^2=0\Rightarrow k=-n^2\Rightarrow\boxed{h_n^h(t)=C_ne^{-n^2t}}$$

מאחר ויש לנו בצד ימין של המד"ר פולינום ממעלה ראשונה ב – t, ננחש את הפתרון הפרטי לפי:

$$h_n^p(t)=\alpha_nt+\beta_n$$

נציב את הניחוש:

$$\alpha_n+n^2(\alpha_nt+\beta_n)=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}t$$

$$\alpha_n+n^2\alpha_nt+n^2\beta_n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}t$$

נשווה מקדמים:

$$n^2\alpha_n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\boxed{\alpha_n=\frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}}$$

לכן:

$$\alpha_n + n^2\beta_n = 0$$

$$n^2\beta_n = \frac{2}{n^3}(-1)^n$$

$$\boxed{\beta_n = \frac{2}{n^5}(-1)^n}$$

לכן:

$$\boxed{h_n^p(t) = \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t + \frac{2}{n^5}(-1)^n}$$

נקבל:

$$h_n(t) = h_n^h(t) + h_n^p(t) = C_n e^{-n^2t} + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t + \frac{2}{n^5}(-1)^n$$

נציב תנאי התחלה של המד"ר:

$$C_n + \frac{2}{n^5}(-1)^n = 0$$

$$\boxed{C_n = \frac{2}{n^5}(-1)^{n+1}}$$

לכן:

$$\boxed{h_n(t) = \frac{2}{n^5}(-1)^{n+1}e^{-n^2t} + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t + \frac{2}{n^5}(-1)^n}$$

לכן:

$$\begin{aligned} w^p(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^5}(-1)^{n+1}e^{-n^2t} + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t + \frac{2}{n^5}(-1)^n\right]\sin(nx) \end{aligned}$$

ולכן:

$$w = w^p + w^h$$

ואז נחזור ל:

$$u = w + v$$

■

שיטת אינטגרל אנרגיה לבעיית גלים בקטע סופי

נסתכל על בעיית הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u_x(0,t) = a(t) \\ u_x(L,t) = b(t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

צ"ל: יחידות בעיית גלים בקטע סופי, באמצעות אינטגרל אנרגיה.

נניח שיש 2 פתרונות לבעיה, u_1, u_2. פותרים את המד"ח ויש להם אותם תנאי שפה וגם אותם תנאי התחלה. נסמן:

$$w = u_1 - u_2$$

w פותרת את המשוואה:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \\ w_x(0,t) = 0 \\ w_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

מ"ל ש - $w = 0$.

מגדירים את:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (w_t^2 + c^2 w_x^2)dx$$

נגזור:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L (w_t^2 + c^2 w_x^2)dx\right] = \frac{1}{2}\int_0^L [2w_t w_{tt} + c^2 2w_x w_{xt}]dx$$
$$= \int_0^L [w_t w_{tt} + w_x w_{xt}]dx$$

כעת נשים לב כי:

$$c^2 w_x w_{xt} = c^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t) - w_{xx} w_t\right] = c^2 \frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t) - c^2 w_{xx} w_t$$
$$= c^2 \frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t) - w_{tt} w_t$$

כעת, נציב בנגזרת של האינטגרל שלנו:

$$E'(t) = \int_0^L \left[c^2 \frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t)\right] dx = c^2 [w_x w_t]_{x=0}^{x=L}$$
$$= c^2\left[\underbrace{w_x(L,t)}_{=0} w_t(L,t) - \underbrace{w_x(0,t)}_{=0} w_t(0,t)\right] = 0$$

לכן:

$$E(t) = const$$

כעת:

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\underbrace{w_t(x,0)}_{=0}\right)^2 + c^2\left(\underbrace{w_x(x,0)}_{=0}\right)^2 dx = 0$$

לכן נקבל בהכרח ש:

$$E(t) = 0$$

מכיוון ש –

$$w_t^2 + c^2 w_{xx}^2 > +0$$

והאינטגרל של פונקציה זו בקטע $[0,L]$ מתאפס, נובע ש –

$$w_t^2 + c^2 w_x^2 = 0$$

לכן:

$$w_x(x,t) = w_t(x,t) = 0$$

לכן:

$$w(x,t) = c$$

אבל מתנאי ההתחלה נקבל ש:

$$w(x,t) = 0$$

ולכן:

$$\boxed{u_1 = u_2}$$

אינטגרל אנרגיה לבעיית החום

נסתכל על בעיית החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = a(t) \\ u_x(L,t) = b(t) \end{cases}$$

צ"ל: יחידות בעיית החום כאשר המד"ח לא הומוגנית ותנאי השפה לא הומוגניים באמצעות אינטגרל אנרגיה.

נניח שיש 2 פתרונות לבעיה, u_1, u_2. פותרים את המד"ח ויש להם אותם תנאי שפה וגם אותם תנאי התחלה. נסמן:

$$w = u_1 - u_2$$

w פותרת את המשוואה:

$$\begin{cases} w_t - k^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_x(0,t) = 0 \\ w_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

מ"ל ש - $w = 0$.

נגדיר את:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L w^2 \, dx$$

נגזור:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L w^2 \, dx\right] = \frac{1}{2}\int_0^L 2ww_t \, dx = \int_0^L ww_t dx$$

כעת, נציב בנגזרת של האינטגרל שלנו את המד"ח:

$$E'(t) = k\int_0^L ww_{xx} \, dx \underbrace{=}_{\text{אינטגרציה בחלקים}} \left(k[ww_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L w_x^2 dx\right)$$

$$= k\left[\underbrace{w(L,t)}_{=0} w_x(L,t) - \underbrace{w(0,t)}_{=0} w_x(0,t)\right] - k\int_0^L w_x^2 dx$$

כעת:

$$E'(t) = -k\int_0^L w_x^2 dx \le 0$$

לכן $E(t)$ פונקציה לא עולה (פונקציה לא עולה אם $t_1 > t_2 \Leftarrow E(t_1) \le E(t_2)$).

כעת נחשב:

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L [w(x,0)]^2 \, dx = 0$$

כעת מאחר ו - $t > 0$ וגם $E(t)$ לא עולה אזי:

$$E(t) \leq E(0) = 0$$

לכן:

$$E(t) \leq 0$$

<u>אבל:</u> $E(t) \geq 0$ מהגדרתו (אינטגרל של פו' חיובית).

$$\Rightarrow E(t) = 0$$

לכן $w^2 = 0$ ואז:

$$w(x,t) = 0$$

ומכאן $u_1 = u_2$.

משוואת החום במוט אינסופי

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

הפתרון לבעיית החום במוט אינסופי:

ניתן ע"י אינטגרל פואסון –

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$$

הפונקציה $e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$ נקראת גרעין למשוואת החום ומשמעותה מקור חום נקודתי רגעי.

אינטגרלים שחשובים להכיר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \operatorname{erf}(x) = \Phi(x)$$

תרגיל:

פתרו את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u_0, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & x < x_1 \text{ או } x > x_2 \end{cases}, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

פתרון:

נציב בנוסחה:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} u_0 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$$

נצבע החלפת משתנים:

$$\frac{x-y}{2a\sqrt{t}} = z$$

$$-\frac{dy}{2a\sqrt{t}} = dz$$

$$y \to x_1 \Rightarrow z \to \frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}$$

$$y \to x_2 \Rightarrow z \to \frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}}$$

לכן:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}-2a\sqrt{t}\,dz$$

צריך להפוך את התחומים ולשים סימן מינוס ולכן:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz=\frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

■