תרגיל 10 אינפי 3 - פתרונות

שאלה 1

נחשב את מטריצת יעקובי של f בעזרת נגזרות חלקיות

$$\begin{pmatrix} e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודה $(0,1,0)$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה הפיכה ולכן f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$. מטריצת יעקובי של ההפוכית שלה היא המטריצה ההופכית

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. בכל נקודה $x \in (-1,1)$ שבה $x \neq 0$ ברור ש f דיפרנציאבילית. בנקודה $x = 0$ יתקיים:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t + 2t^2 \sin\frac{1}{t}}{t} = \lim_{t\to 0} 1 + 2t\sin\frac{1}{t} = 1 \neq 0$$

2. עבור כל $k \in \mathbb{N}$

$$f(\frac{2}{(4k+1)\pi}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2$$

$$f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2$$

היות ו

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} < \frac{2}{(4k+1)\pi}, \quad -2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2 < 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2$$

אז ברור ש

$$f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) < f(\frac{2}{(4k+1)\pi})$$

כמו כן

$$f(\frac{2}{(4k+4)\pi}) = f(\frac{2}{(4k+4)\pi}) = \frac{2}{(4k+4)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+4)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{4\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

כעת נותר להוכיח

$$\frac{2}{(4k+4)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2$$

עם קצת חישובים:

$$\frac{1}{(4k+4)} > \frac{1}{(4k+3)} - \frac{4}{(4k+3)^2\pi}$$

$$(4k+3)^2\pi > (4k+4)(4k+3)\pi - 4(4k+4)$$

$$\pi(16k^2+24k+9) > \pi(16k^2+28k+12) - 16k - 16$$

$$16k+16 > \pi(4k+3)$$

אכן מתקיים. כלומר, על כל קטע פתוח סביב 0, f היא לא מונוטונית , אבל פונקציה רציפה וחד חד ערכית חייבת להיות מונוטונית ולכן f לא חד חד ערכית ולכן לא הפיכה (בכל סביבה של 0).

3. f לא גזירה ברציפות. הנגזרת של f היא

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

וכמובן שהגבול

$$\lim_{x\to 0}(1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x})$$

לא קיים. לכן הנגזרת לא רציפה ב 0.

שאלה 3

צריך לחשב מינימום לפונקציה

$$x^2 + y^2$$

תחת האילוץ

$$7x^2 + 8xy + y^2 = 45$$

משוואות לגרנז' הן:

$$14x + 8y + 2\lambda x = 0$$

$$2y + 8x + 2\lambda y = 0$$

$$7x^2 + 8xy + y^2 = 45$$

את שתי המשוואות הראשונות אפשר לכתוב בתור

$$\left(\begin{array}{cc} 14 + 2\lambda & 8 \\ 8 & 2 + 2\lambda \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

אם המטריצה הפיכה אז הפתרון היחיד הוא $x = y = 0$ וזה לא מקיים את האילוץ.
לכן הפתרון הרצוי הוא כאשר המטריצה לא הפיכה. כלומר:

$$0 = \left| \left(\begin{array}{cc} 14 + 2\lambda & 8 \\ 8 & 2 + 2\lambda \end{array} \right) \right| = (14 + 2\lambda)(2 + 2\lambda) - 64 = 4\lambda^2 + 32\lambda + 28 - 64$$

כלומר

$$\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -9$$

אם $\lambda = 1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{cc} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

כלומר

$$-2x = y$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$7x^2 - 16x^2 + 4x^2 = 45$$

$$-5x^2 = 45$$

וזה לא ייתכן.

אם $\lambda = -9$ נקבל

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$x = 2y$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$28y^2 + 16y^2 + y^2 = 45$$

$$45y^2 = 45$$

$$y^2 = 1$$

נקבל

$$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$$

כלומר הנקודות שקיבלנו הן:

$$(2,1), \quad (-2,-1)$$

ועבורן

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 5$$

נסביר למה הן בהכרח נקודות מינימום.

ניקח כדור ברדיוס מספיק גדול כך שהוא יחתוך את ההיפרבולה. על החיתוך של הכדור וההיפרבולה, f חייבת לקבל מינימום גלובאלי. אבל המרחק של כל נקודה בקבוצת החיתוך יותר קטן מהמרחק של נקודות על ההיפרבולה שלא נמצאות בחיתוך. לכן המינימום הזה הוא מינימום גלובאלי. לכן קיים מינימום ל f על ההיפרבולה.

מינימום זה חייב להיות הערך שמצאנו.

לכן המרחק הקצר ביותר הוא $\sqrt{5}$ (כי עבדנו עם $x^2 + y^2$) שהיא המרחק בריבוע.

שאלה 4

$$f(x,y) = x + y$$

$$D = \{(x,y) \mid xy \geq 4, \quad x + 2y \leq 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

D היא קבוצה סגורה. מינימום ומקסימום גלובאליים יתקבלו או בפנים הקבוצה או בשפה שלה. נחפש נקודות חשודות.

בפנים הקבוצה החשודות תתקבלנה במקומות שבהם

$$\nabla f = 0$$

אבל

$$\nabla f = (1,1)$$

אז אין נקודות חשודות בפנים.
נותר לבדוק את השפה:
אם $y=0$ או $x=0$ הנקודות בכלל לא בתחום כי נדרש $xy \geq 4$.
אם $x+2y=9$ אז $x+y=9-y$ אז צריך לחפש נקודות קיצון של

$$9-y$$

שהן תתקבלנה בקצוות, כלומר כאשר

$$x+2y=9$$

וגם

$$xy=4$$

כלומר

$$(9-2y)y=4$$

$$9y-2y^2=4$$

$$2y^2-9y+4=0$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm 7}{4}$$

כלומר

$$y=\frac{1}{2}, \quad y=4$$

כלומר בנקודות

$$(8,\frac{1}{2}), \quad (1,4)$$

כלומר אלה נקודות חשודות.

נותר למצוא נקודות חשודות על $xy=4$. נקבל:

$$y=\frac{4}{x}$$

לכן צריך למצוא מקסימום של

$$x+\frac{4}{x}$$

נגזור ונקבל:

$$1-\frac{4}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm 2$$

נזכור כי x,y חיוביים ולכן בהכרח $x=2$ ואז $y=2$.
קיבלנו 3 נקודות חשודות, נבדוק אותן על ידי הצבה:

$$f(2,2)=4$$

$$f(8,\frac{1}{2})=8\frac{1}{2}$$

$$f(1,4)=5$$

לכן $(2,2)$ הוא מינימום גלובאלי ו $(8,\frac{1}{2})$ הוא מקסימום גלובאלי.

שאלה 5

הפונקציה שלנו היא:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2$$

והאילוץ שלנו הוא:

$$g(x_1,\ldots,x_n)=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n+D=0$$

ראשית הגרדיאנט של g הוא

$$\nabla g=(C_1,\ldots,C_n)$$

שזת מטריצה מדרגה 1 ולכן כל נקודת קיצון צריכה לקיים את המשוואות של כופלי לגרנז' הלגרנז'יאן הוא:

$$L(x_1\ldots,x_n,\lambda)=(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2+\lambda(C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n+D)=0$$

לכן המשוואות הן:

$$2(x_i - a_i) + \lambda C_i = 0$$

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + D$$

מהמשוואות נקבל ש

$$x_i = -\frac{\lambda C_i}{2} + a_i$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$-\frac{\lambda C_1C_1}{2} + a_iC_1 - \frac{\lambda C_2C_2}{2} + a_2C_2 - \ldots - \frac{\lambda C_nC_n}{2} + a_nC_n + D = 0$$

אם נסמן $\bar{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ אז קיבלנו ש

$$-\lambda\frac{\bar{C}\cdot\bar{C}}{2} + a\cdot\bar{C} + D = 0$$

$$\lambda = \frac{2D + 2a\cdot\bar{C}}{\bar{C}\cdot\bar{C}}$$

ולכן

$$x_i = -\frac{C_i(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_i$$

כלומר מצאנו את הנקודה

$$(-\frac{C_1(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_1, \ldots, -\frac{C_n(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_n)$$

איך יודעים שזו נקודת מינימום? נפעיל שיקול כזה: ניקח כדור סגור שמרכזו ב a עם רדיוס מספיק גדול כך שהוא יחתוך את המישור. החיתוך של המישור עם הכדור היא קבוצה קומפקטית ולכן קיים ל f מינימום עליה. אבל זה יהיה המינימום של f על כל המישור כי כל הנקודות שבחיתוך עם הכדור יותר קרובות לa מאשר הנקודות שמחוצה לו.

כעת נחשב את המרחק:

$$\sqrt{(-\frac{C_1(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_1 - a_1)^2 + \ldots + (-\frac{C_n(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_n - a_n)^2} =$$

$$\sqrt{(\frac{C_1(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}})^2 + \ldots + (\frac{C_n(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}})^2} = \sqrt{\frac{(a\cdot\bar{C} + D)^2}{(\bar{C}\cdot\bar{C})^2}(C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2)} =$$

$$\sqrt{\frac{(a\cdot\bar{C} + D)^2}{(\bar{C}\cdot\bar{C})^2}\bar{C}\cdot\bar{C}} = \frac{|a\cdot\bar{C} + D|}{\sqrt{\bar{C}\cdot\bar{C}}}$$

או בצורה יותר מפורשת:

$$\frac{|a_1C_1 + \ldots + a_nC_n + D|}{\sqrt{C_1^2 + \ldots + C_n^2}}$$

שאלה 6

בעצם מבקשים למצוא קיצון של

$$f(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$$

תחת האילוץ

$$g(x,y,z) = xyz = S$$

משוואות לגרנז' הן:

$$2y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$2x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$xyz = S$$

נחסר את המשוואה השניה מהראשונה ונקבל

$$2x - 2y + \lambda z(x - y) = 0$$

$$(x - y)(2 + \lambda z) = 0$$

אפשרות א': $2 + \lambda z = 0$ ולכן $z = -\frac{2}{\lambda}$ אבל אם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל:

$$2y - 4 - 2y = 0$$

כלומר $-4 = 0$ שזו סתירה.
לכן נשארנו עם אפשרות ב' שהיא: $x = y$.
בדומה מוכיחים שגם $y = z$.
ולפי האילוץ ברור ש

$$x^3 = S$$

כלומר

$$x = y = z =^3 \sqrt{S}$$

כלומר זאת קוביה.

שאלה 7

$$f(x,y,z) = xy + yz$$

תחת האילוצים

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$$

מטריצת הנגזרות של האילוצים היא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

מתי לא נקבל דרגה 2? אפשרות אחת היא אם $x = 0$ ו $z = 0$ אבל אין נקודה כזאת שמקיימת את האילוצים. אפשרויות אחרות הן כאשר $y = 0$ ו$x = 0$ או $y = 0$ ו$z = 0$ וגם אין נקודות כאלה שמקיימות את האילוצים. אז בכל נקודה שמעניינת אותנו דרגת המטריצה היא 2 ולכן כל נקודות המינימום ומקסימום יתקבלו בפתרונות של משוואות לגרנז'.

הלגרנז'יאן הוא:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(y^2 + z^2 - 4)$$

מערכת המשוואות היא:

$$y + 2\lambda_1 x = 0$$

$$x + z + 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0$$

$$y + 2\lambda_2 z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 + z^2 = 4$$

שלושת המשוואות הראשונות הן מערכת לינארית

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם המטריצה הפיכה אז הפתרון היחיד יהיה $x = y = z = 0$ שהוא כמובן לא מקיים את האילוצים. לכן המטריצה לא הפיכה ונקבל שהדטרמיננטה שלה שווה ל 0.

$$\left| \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} \right| = 2\lambda_1 2\lambda_2(2\lambda_1 + 2\lambda_2) - 2\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$$

כלומר:

$$(4\lambda_1\lambda_2 - 1)(2\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$$

אפשרות ראשונה: $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ואז נקבל מהמשוואה השניה: $x = -z$ אבל אם נחסר אילוץ אחד מהשני נקבל

$$z^2 - x^2 = 3$$

ואם $z = -x$ נקבל $z^2 - x^2 = 0$. סתירה.
לכן בהכרח

$$4\lambda_1\lambda_2 - 1 = 0$$

כלומר:

$$4\lambda_1\lambda_2 = 1$$

מהמשוואה הראשונה

$$y = -2\lambda_1 x$$

מהמשוואה השלישית

$$y = -2\lambda_2 z$$

אם נכפול אותם נקבל:

$$y^2 = 4\lambda_1\lambda_2 xz = xz$$

נציב זאת באילוצים ונקבל:

$$xz + x^2 = 1$$

$$xz + z^2 = 4$$

מהמשוואה הראשונה:

$$z = \frac{1 - x^2}{x}$$

(נשים לב שאם $x = 0$ אז לפי $y^2 = xz$ גם $y = 0$ ואז האילוץ הראשון לא מתקיים).
נציב זאת במשוואה השניה ונקבל

$$1 - x^2 + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{x^2} = 4$$

$$x^2 - x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 = 4x^2$$

$$5x^2 = 1$$

ולכן

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

ואז

$$z = \pm\sqrt{\frac{16}{5}}$$

ואז

$$y^2 = \frac{4}{5}$$

ולכן הנקודות האפשריות הן:

$$(\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}}), \quad (-\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}})$$

אם נציב נקבל:

$$f(\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}}) = \pm 2$$

$$f(-\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}}) = \mp 2$$

לכן $(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}})$ו $(-\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}})$ הם מקסימום ו $(\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}})$ ו $(-\sqrt{\frac{1}{5}}, +\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}})$ הם מינימום.