08/08/21

פתרון מבחן מועד א' – 88-133 אינפי 2 תשפ"א

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x^2+1}{(x+2)^3}dx$

זו פונקציה רציונאלית, דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה, וזה אינו שבר חלקי.

לכן עלינו לפרק לשברים חלקיים, במקרה זה במקום לפרק באופן קלאסי אעשה טריק:

$$\frac{2x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{2x^2+8x+8-8x-7}{(x+2)^3} = \frac{2(x+2)^2-8x-16+9}{(x+2)^3} = \frac{2(x+2)^2-8(x+2)+9}{(x+2)^3}$$

ולכן סה"כ

$$\frac{2x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{2}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} + \frac{9}{(x+2)^3}$$

וכעת האינטגרל הוא

$$\int \frac{2x^2+1}{(x+2)^3}dx = 2\ln|x+2| + \frac{8}{x+2} - \frac{9}{2(x+2)^2} + C$$

ב. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \begin{Bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

2. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x}dx$

אפשר לפתור את התרגיל עם מבחן ההשוואה, או עם חישוב ישיר. נבצע את החישוב הישיר

$$\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx = \begin{Bmatrix} f' = e^{-x} & g = x \\ f = -e^{-x} & g' = 1 \end{Bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1) = -\frac{x+1}{e^x}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x}{e^x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{t+1}{e^t} + 1\right] = 1$$

לכן האינטגרל מתכנס.

ב. $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

גם כאן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה או בחישוב ישיר, ואנחנו נבצע חישוב ישיר.

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} f' = \frac{1}{x^2} & g = \ln(x) \\ f = -\frac{1}{x} & g' = \frac{1}{x} \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln(x)+1}{x}$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln(t)+1}{t} + 1\right] = 1$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

דרך נוספת לפתור את התרגיל:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ 1 \le x \le \infty \\ 0 \le t \le \infty \\ x = e^t \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty \frac{t}{e^t}dt = 1$$

הגענו בדיוק לאינטגרל מסעיף א'.

3. קבעו עבור סדרת הפונקציות $f_n(x) = (\ln(x))^n$ אם היא מתכנסת במידה שווה בכל אחת מן התחומים הבאים:

א. $A = (1, e)$

בתחום זה מתקיים כי $0 < \ln(x) < 1$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}(\ln(x))^n = 0$$

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{1<x<e}|(\ln(x))^n - 0| = 1$$

זה כיוון ש $\lim_{x\to e}(\ln(x))^n = 1^n = 1$ ומדובר בפונקציה חיובית ועולה.

סדרת החסמים כמובן אינה שואפת לאפס, וסדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש בתחום.

ב. $B = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 1\right)$

בתחום זה מתקיים כי $-\frac{1}{2} < \ln(x) < 0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}(\ln(x))^n = 0$$

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{e^{-\frac{1}{2}}<x<1} |(\ln(x))^n - 0| = \frac{1}{2^n}$$

זאת כיוון ש $|\ln(x)|^n$ היא פונקציה מונוטנית יורדת (הרי $\ln(x)$ שלילית ועולה), וכן $\lim_{x\to e^{-\frac{1}{2}}} |\ln(x)|^n = \frac{1}{2^n}$

הפעם סדרת החסמים כן שואפת לאפס, וסדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בתחום זה.

4. תהי f פונקציה בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a,b]$. לכל חלוקה $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ של הקטע $[a,b]$ נגדיר את

$$D(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^2(x_i) - 2f(x_i)f(x_{i-1}) + f^2(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

א. הוכיחו כי אם P_n היא סדרת חלוקות עבורה $\lambda(P_n) \to 0$, מתקיים כי $D(f,P_n) \to \int_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx$

$$D(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}{x_i - x_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 (x_i - x_{i-1})$$

לפי משפט לגראנז', לכל i קיימת $x_{i-1} < c_i < x_i$ כך ש $f'(c_i) = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

ולכן

$$D(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \left(f'(c_i)\right)^2 (x_i - x_{i-1}) = S_R(f'^2, P, C)$$

כלומר $D(f,P)$ הוא סכום רימן של f'^2 על החלוקה P עם בחירת הנקודות $C=\{c_1,\dots,c_n\}$

כיוון שf' רציפה, כך גם f'^2, ולכן סכומי הרימן מתכנסים לאינטגרל המסויים שלה כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס (היא אינטגרבילית), וזה בדיוק מה שנדרשנו להוכיח.

ב. חשבו את גבול הסדרה הבאה:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} n\left(\sin^2\left(\frac{k}{n}\right) - 2\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k-1}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

נשים לב כי $a_n = D(f,P_n)$ כאשר $f(x) = \sin(x)$ וכן $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ חלוקה של הקטע $[0,1]$

$\lambda(P_n) = \frac{1}{n} \to 0$ ולכן לפי סעיף קודם $a_n \to \int_0^1 \cos^2(x)dx$

כעת$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ ולכן

$$\int_0^1 \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2)}{4}$$

5. תהי f בעלת נגזרת רציפה בקטע $(0,1]$, כך שהנגזרת f' אינה חסומה בקטע $(0,1]$.

א. הוכיחו/הפריכו: האינטגרל $\int_0^1 f'(x)dx$ מתכנס.

עבור הפונקציה $f(x) = \ln(x)$ מתקיים כי הנגזרת שלה $f'(x) = \frac{1}{x}$ רציפה ב$(0,1]$ איך אינה חסומה שם.

האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ מתבדר, ולכן זו הפרכה.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם f רציפה בקטע $[0,1]$ אזי $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$.

כיוון שהנגזרת אינה חסומה בקטע, מדובר באינטגרל לא אמיתי. לפי ההגדרה:

$$\int_0^1 f'(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 f'(x)dx$$

כיוון ש f' רציפה בקטע $[t,1]$ היא אינטגרבילית שם ולפי נוסחאת ניוטון לייבניץ

$$\int_t^1 f'(x)dx = f(1) - f(t)$$

ביחד,

$$\int_0^1 f'(x)dx = \lim_{t\to 0^+}[f(1) - f(t)]$$

עד כה, כל זה היה נכון גם בסעיף א'; אך כעת נתון לנו כי f רציפה ב$[0,1]$ ולכן

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0)$$

וסה"כ

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$$