אלגברה לינארית של מודולים

יהי M מודול מעל חוג R.
קבוצה $T \subseteq M$ פורשת את M אם לכל $y \in M$ קיימים $x_1, \dots x_n \in T$ ו-$\alpha_1, \dots \alpha_n \in R$ כך ש-$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.

הערה: T יכולה להיות קבוצה אינסופית, אבל חייבים לבחור בכל פעם מספר סופי של xים ו-αות.

אם R שדה, שחזרנו את ההגדרה המוכרת.

הגדרה

מודול שיש לו קבוצה פורשת סופית נקרא "מודול סופי"("מודול נוצר סופית").

$\Leftrightarrow$ קיימים $x_1, \dots x_n \in M$ כך שלכל $y \in M$ קיימים $\alpha_1, \dots \alpha_n$ כך ש-$y = \alpha_1 x_1 + \dots \alpha_n x_n$.

$\Leftrightarrow$ קיימים $x_1, \dots x_n \in M$ כך ש-$M = Rx_1 + \dots + Rx_n$.

הערה

יהי M מודול מעל R. לכל $x \in M$, $Rx = \{\alpha x | \alpha \in R\}$ הוא תת־מודול. נקרא תת־מודול ציקלי.
M נקרא מודול ציקלי אם קיים x כך ש-$M = Rx$.
[כאשר $R = \mathbb{Z}$, מודול ציקלי=חבורה ציקלית]

לכן

אם $x_1, \dots x_n \in M$,
$M \supseteq Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$ = תת המודול הנפרש ע"י $x_1, \dots x_n$

דוגמה

נתבונן ב-$\mathbb{Q}$ כמודול מעל $\mathbb{Z}$. נניח ש-$x_1, \dots x_n \in \mathbb{Q}$: לכל i,

$$x_i = \frac{a_i}{b_i} \qquad a_i, \underbrace{b_i}_{\neq 0} \in \mathbb{Z}$$

$$\sum \mathbb{Z}x = \sum \mathbb{Z}\frac{a_i}{b_i} \subseteq \sum \mathbb{Z}\frac{1}{b_i} \subseteq \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{b_i}$$

ובצורה יותר מדויקת:

יהי b מכנה משותף מקסימלי(=כפולה משותפת מינימלית) של המכנים b_i. אפשר לכתוב $x_i = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_i'}{b}$.

נסמן בa את המחלק המשותף המקסימלי של הa_i'.

$$\underbrace{\sum \mathbb{Z}x_i}_{\substack{\text{the module}\\ \text{spanned by}\\ \text{the } x\text{es}}} = \sum \mathbb{Z}\frac{a_i'}{b} = \frac{1}{b}\left(\sum \mathbb{Z}a_i'\right) = \frac{1}{b}\mathbb{Z}a = \mathbb{Z} \cdot \frac{a}{b}$$

$\Leftarrow$ הוכחנו שכל תת־מודול נוצר סופית של $\mathbb{Q}$ הוא ציקלי.

דוגמה: $\mathbb{Z}\frac{3}{8} + \mathbb{Z}\frac{1}{6} = \mathbb{Z}\frac{9}{24} + \mathbb{Z}\frac{4}{24} = \mathbb{Z}\frac{1}{24}$

אבל $\mathbb{Q}$ אינו ציקלי, כי לכל $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2b} \notin \mathbb{Z} \cdot \frac{a}{b}$

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}$ לא נוצר סופית.

הערה

$\mathbb{Q}$ נפרש על ידי המספרים

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots \frac{1}{n!}, \dots$$

שכן

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,(b-1)!}{b!}$$

למעשה, בכל שלב $\frac{1}{n!}$ פורש את כל הקודמים.

הגדרה

$T \subseteq M$ בלתי תלויה אם לכל $x_1, \dots x_n \in T$ שונים, אם $\sum \alpha_i x_i = 0$ אז $\forall_i \alpha_i = 0$.

בפרט, $\{x_1, \dots x_n\}$ Tב"ת אם $\sum \alpha_i x_i = 0 \Leftarrow \forall_i \alpha_i = 0$.

דוגמה

$\mathbb{Z}$ כמודול מעל עצמה.

- $\{1\}$ פורשת ב"ת
- $\{2\}$ לא פורשת ב"ת
- $\{2,3\}$ פורשת תלויה
- $\{4,6\}$ לא פורשת תלויה

דוגמה

יהי R חוג קומוטטיבי כלשהו, R מודול מעל עצמו.
בכל קבוצה ב"ת יש לכל היותר איבר אחד:
אם $a,b\in T$, $a\neq b$ אז $(-b)\,a+a\cdot b=0$

דוגמה

יהי A <u>מודול מעל $\mathbb{Z}$</u> כך ש$nA=0$ עבור $n\neq 0$ כלשהו.
(כלומר A <u>חבורה אבלית</u> עם $\exp A \mid 0$)
לכל $a\in A$, $n\cdot a=0$ ולכן $\{a\}$ תלויה.

הגדרה

בסיס של מודול M הוא קבוצה פורשת וב"ת.
מודול שיש לו בסיס נקרא <u>מודול חופשי</u>.
לדוגמה, מעל שדה, כל מודול הוא חופשי.
מעל $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ אינו חופשי(אין קבוצה$\neq\emptyset$ ב"ת).

דוגמה

R חוג. $R^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle| x_i\in R\right\}$.

אפשר להפוך את R^n למודול מעל R על ידי חיבור רכיבים והכפל $\alpha\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}$.

בתוך R^n, נסמן $i \leftarrow$ $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

טענה: $\{e_1, \dots e_n\}$ הוא בסיס של R^n.

הוכחה: יהי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$.

$$\sum x_i e_i = \sum x_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

מדוע הקבוצה ב"ת? אם $\sum x_i e_i = 0 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftarrow 0 = \forall_i x_i$

כלומר, R^n הוא מודול חופשי.

משפט

כל מודול בעל בסיס בגודל n איזומורפי ל $\boxed{R^n}$.

הוכחה

יהי M מודול עם בסיס $\{b_1, \dots b_n\}$. נוכיח $M \cong R^n$.

נבנה איזומורפיזם $M \to R^n$ ע"י $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum x_i b_i$.

- ההעתקה שומרת חיבור וכפל בסקלר:

$$\varphi(\alpha \cdot \vec{x}) = \varphi \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \sum (\alpha x_i) b_i = \sum \alpha (x_i b_i) = \alpha \cdot \sum x_i b_i = \alpha \cdot \varphi(\vec{x})$$

- φ חח"ע כי $\{b_1,\dots b_n\}$ב"ת.
- φ על כי $\{b_1,\dots b_n\}$ פורשת.

דוגמה למודול חופשי שגודל הבסיס שלו אינו מוגדר היטב

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהי V המ רחב הוקטורי של סדרות ב$\mathbb{F}$:

$$V=\{(\alpha_1,\alpha_2,\dots)\}$$

$$R=\mathrm{End}\,(V)=\{T:V\to V \text{ העתקה לינארית}\}$$

כמודול מעל עצמו, $R\cong R^1$, כלומר יש לR בסיס: $\{1\}$.
נגדיר:

$$H\left(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots\right)=\left(\alpha_0,\alpha_2,\alpha_4,\dots\right)$$

$$S\left(\alpha_0,\alpha_1,\dots\right)=\left(0,\alpha_0,\alpha_1,\dots\right)$$

$$S'\left(\alpha_0,\alpha_1,\dots\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\dots\right)$$

$$D\left(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots\right)=\left(\alpha_0,0,\alpha_1,0,\alpha_2,0,\dots\right)$$

מתקיים:

$$HD=S'S=1$$

נגדיר איזומורפיזם של מודולים $R^2\to R$ ע"י

$$\psi:\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}\mapsto T_1D+T_2DS$$

ברור שזה הומומורפיזם:

$$\psi\left(T'\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}\right)=\psi\begin{pmatrix}T'T_1\\T'T_2\end{pmatrix}=T'T_1D+T'T_2DS=T'\psi\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}$$

וכנ"ל עבור חיבור.
נראה שψ חח"ע ועל.
נניח ש$0=\psi\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}$. לכל $(\alpha_1,\dots)$,

$$\left(T_1H+T_2HS\right)\left(\vec{\alpha}\right)=0$$

$$\left(T_1H+T_2HS\right)=T_1\left(\alpha_0,\alpha_2,\alpha_4,\dots\right)+T_2\left(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\dots=0\right)$$

$\Leftarrow T_1=T_2=0$.

כעת יהי $T \in R$.

$$T_1 H + T_2 HS' = T$$

נבחר $\begin{array}{c} T_1 = TD \\ T_2 = TSD \end{array}$.

$$\psi \begin{pmatrix} TD \\ TSD \end{pmatrix} = TDH + TSDHS' = T\left(DH + SDHS'\right) = T$$

$\Leftarrow$ למודול R יש:

- בסיס בין איבר בודד, $\{1\}$.
- בסיס בן שני איברים, $\{H, HS'\}$.

כביכול R גם ממימד 1 וגם ממימד 2.

תרגיל

נניח ש־$M \cong R^n$ כמודולים מעל R, $I \lhd R$.
אז

$$M/IM \cong \left(R/I\right)^n$$

כמודולים מעל R/I.

הוכחה

יהי $\varphi : M \to R^n$ האיזומורפיזם הנתון.
נגדיר $M \to \left(R/I\right)^n$ על ידי $v \mapsto \varphi(v) \mod I^n$.

משפט

יהי R חוג <u>קומוטטיבי</u>.
אז לכל מודול חופשי(עם בסיס סופי) יש מימד מוגדר היטב.

הוכחה

יהי $P \lhd R$ אידיאל מקסימלי. מכיוון שR קומוטטיבי, R/P <u>שדה</u>.
נניח $M^n \cong R^n$. אז

$$M/PM \cong \left(R/P\right)^n$$

כמרחב וקטורי, שם המימד, n, מוגדר היטב.