

## תזכורת

יהי  $\mathbb{F}$  שדה.

$\mathbb{F}[x]$  תחום אוקלידי  $\Leftarrow$  ראשי  $\Leftarrow$  כל אי-פריק הוא ראשוני.

אם  $f$  פולינום אי-פריק אז  $\langle f \rangle \triangleleft \mathbb{F}[x]$  אידיאל מקסימלי  $\Leftarrow \mathbb{F}[x]/\langle f(x) \rangle$  שדה. (\*)

יהי  $f$  פולינום כלשהו.

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}/\mathbb{F} \cap \langle f \rangle \cong \mathbb{F} + \langle f \rangle / \langle f \rangle \hookrightarrow \mathbb{F}[x] / \langle f \rangle$$

$\mathbb{F}[x] / \langle f(x) \rangle$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$ . בסיס:  $1, x, \dots, x^{n-1}$  (הוכחה אוקלידית).  
לסיכום,  $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x] / \langle f \rangle) = \deg(f)$ .

## טענה

נניח ש  $f$  אי-פריק. אז בשדה  $K = \mathbb{F}[x] / \langle f \rangle \supseteq \mathbb{F}$  יש שורש לפולינום  $f: x + \langle f \rangle$ .

$$f(x + \langle f \rangle) = f(x) + \langle f \rangle = 0 + \langle f \rangle \quad \text{הוכחה:}$$

המסר הוא שלכל פולינום אפשר למצוא שורש - אם לא בשדה שלו אז בשדה יותר גדול שמכיל אותו.

## הומומורפיזם ההצבה

יהי  $K$  שדה כלשהו המכיל את  $\mathbb{F}$ . יהי  $a \in K$ . אפשר להגדיר הומומורפיזם  $\Phi_a: \mathbb{F}[x] \rightarrow K$  ע"י  $\Phi_a(f) = f(a)$ .

$$F[a] := \text{Im} \Phi_a$$

$$\ker \Phi_a = \{g \mid g(a) = 0\} \triangleleft \mathbb{F}[x]$$

אם  $\ker \Phi_a = 0$ , אומרים ש  $a$  טרנצנדנטי מעל  $\mathbb{F}$ .

$$\mathbb{F}[a] \cong \mathbb{F}[x] / \ker \Phi_a$$

אם יש פולינומים המאפסים את  $a$ , יש יוצר  $h$  של  $\ker \Phi_a$ .

$$h(x) \mid g(x) \iff g(a) = 0$$

בפרט מעלת  $h$  מינימלית בין הפולינומים ב  $\ker \Phi_a \Leftarrow$  הפולינום המינימלי של  $a$

$$\boxed{\mathbb{F}[x] / \langle h \rangle \cong \mathbb{F}[x]} \subseteq K$$

מכאן ש  $K$  שדה.

$h$  אי-פריק, ולפי (\*)  $\mathbb{F}[a]$  שדה.

## הערות

1. כל פולינום מינימלי של איבר בשדה הוא אי-פריק.
2.  $[\mathbb{F}(a) : \mathbb{F}]$  שווה למעלה של הפולינום המינימלי של  $a$ .

## מסקנה

אם  $g(a) = 0$  ו  $g \in \mathbb{F}(a) : \mathbb{F}$  אז  $\deg g = [\mathbb{F}(a) : \mathbb{F}]$

## דוגמה

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{7} \in \mathbb{C}$$

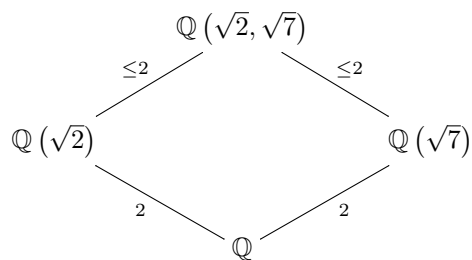
$$a^2 = 9 + 2\sqrt{14}$$

$$(a^2 - 9)^2 = 4 \cdot 14$$

$$a^4 - 18a^2 + 35 = 0$$

אם נוסיף לרציונאליים את  $a$  נקבל  $\mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$  (לא טריוויאלי שאפשר לקבל  $\sqrt{2}, \sqrt{7}$  בנפרד באמצעות  $a$ )  
מוכיחים ש  $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  ואז נובע ש  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = 4$  ולכן  $a^4 - 18a^2 + 35$  אי-פריק.

---



## הגדרה

$f \in \mathbb{F}[x]$   
 $\mathbb{F} \subseteq K$  מפצל את  $f$  אם יש  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  כך ש  $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$

## משפט

לכל פולינום  $f \in \mathbb{F}[x]$  יש שדה מפצל.

## הוכחה

נפרק את הפולינום לגורמים אי-פריקים מעל  $\mathbb{F}$ .  
אם כל הגורמים לינאריים - גמרנו.  
אחרת, נבחר גורם אי-פריק  $f_1 \mid f$  ונעבור לשדה  $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}[x]/\langle f_1 \rangle$ .  
ממשיכים באופן אופני: בכל פעם עוברים להרחבה שבה יש שורש לאיזשהו גורם אי-פריק  
לא לינארי של  $f$ .

**הוכחנו:** יש שדה מפצל ממימד  $(\deg f)! \geq$

## הגדרה

$a \in E$  אלגברי אם יש פולינום  $h \in \mathbb{F}[x]$  כך ש  $h(a) = 0$ .

## הגדרה

הרחבה  $E/F$  נקראת אלגברית אם כל האיברים של  $E$  אלגבריים.  
לדוגמה:  $[E : F]$  סופי  $\iff$  אלגברי.  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots] / \mathbb{Q}$  הרחבה אלגברית ממימד  $\infty$ .

$$\mathbb{F}(t) = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid \begin{array}{l} f, g \text{ polynoms} \\ g \neq 0 \end{array} \right\}$$

לא אלגברי כי  $t$  לא אלגברי.

## הגדרה

$\mathbb{F} \subseteq E$  שדות.  $E$  נוצר על ידי  $S \subseteq E$  מעל  $\mathbb{F}$  אם אין תת-שדות אמיתיים של  $E$  המכילים את  $\mathbb{F}$  ואת  $S$ .

## הגדרה

$E$  נוצר סופית אם הוא נוצר ע"י קבוצה סופית.

## משפט

התכונות הבאות של  $E/\mathbb{F}$  שקולות:

1.  $[E : \mathbb{F}] < \infty$

2.  $E/\mathbb{F}$  אלגברית ונוצרת סופית.

3.  $E$  נוצרת ע"י קבוצה סופית של איברים אלגבריים.

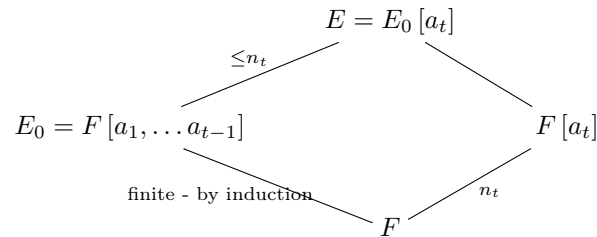
### הוכחה

2  $\Leftarrow$  1 אלגבריות - טריוויאלי

3  $\Leftarrow$  2 לקרוא

1  $\Leftarrow$  3  $E = F[a_1, \dots, a_t]$ , כל אלגברי מעל  $F$ .

$a_t$  מאפס פולינום  $h_t \in \mathbb{F}[x]$  ממעלה  $n_t$



$$[E : \mathbb{F}] = [E : E_0] \cdot [E_0 : \mathbb{F}] \leq n_t \cdot [E_0 : \mathbb{F}] < \infty \Leftarrow$$

### מסקנה

תהי  $\mathbb{F} \subseteq L$  הרחבה כלשהי.

לכל  $a, b \in L$  אלגבריים, גם  $a + b, ab, \frac{1}{a}$  אלגבריים.

### הוכחה

2  $\Leftarrow$  3  $\mathbb{F}[a, b]$  אלגברי כי  $a + b, a \cdot b, a^{-1} \in \mathbb{F}[a, b]$ .

לכן הסגור האלגברי של  $\mathbb{F}$  בתוך  $L$ , שהוא אוסף האברים של  $L$  שהם אלגבריים מול  $\mathbb{F}$ , הוא תת-שדה.

### מסקנה נוספת

הרחבה אלגברית נוצרת סופית של הרחבה אלגברית נוצרת סופית היא הרחבה אלגברית נוצרת סופית

### הוכחה

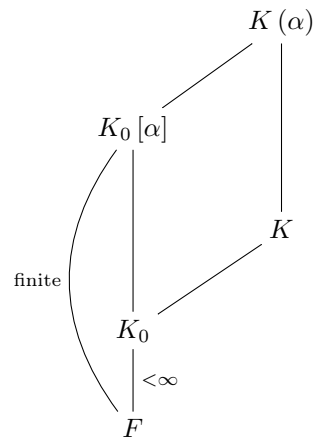
1  $\Leftarrow$  2

(בפרט, אם  $K/\mathbb{F}$  אלגברית ו  $\alpha$  אלגברי מעל  $K$ , אז  $\alpha$  אלגברי מעל  $\mathbb{F}$ .)

---

<sup>1</sup>"אלגברי מעל" = "מאפשר פולינום שמקדמיו ב"

נסמן ב  $\beta_0, \dots, \beta_m \in K$  את מקדמי הפולינום ש  $\alpha$  מאפס. אז  $\alpha$  אלגברי מעל  $K_0 = \mathbb{F}[\beta_0, \dots, \beta_m] \subseteq K$ .



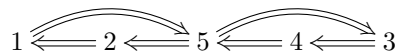
## שדות סגורים אלגבריים

### משפט

התנאים הבאים שקולים עבור שדה  $E$ :

1. לכל פולינום מעל  $E$  יש שורש.
2. כל פולינום מעל  $E$  מתפצל ב  $E$ .
3. אין ל  $E$  הרחבות אלגבריות  $E <$ .
4. אין ל  $E$  הרחבות סופיות  $E <$ .
5. כל פולינום אי פריק הוא לינארי.

### הוכחה



### הגדרה

שדה כזה נקרא סגור אלגברית.

## למה

תהי  $E/\mathbb{F}$  הרחבה אלגברית. אם  $E$  מפצל כל פולינום עם מקדמים ב $\mathbb{F}$ , אז  $E$  סגור אלגברית.

## הוכחה

יהי  $f \in E[x]$  פולינום אי-פריק מעל  $E$ . נסמון ב $\mathbb{F}_1$  את השדה הנוצר מעל  $\mathbb{F}$  על-ידי המקדמים של  $f$ . יהי  $\alpha$  שורש של  $f$  בשדה הרחבה של  $E$ . יש לו פולינום מינימלי מעל  $\mathbb{F}$ , שמתפצל ב $E$  לפי ההנחה, ולכן  $\alpha \in E$ .

## למה

לכל שדה  $\mathbb{F}$  יש הרחבה אלגברית  $E$  עם שורש ב $E$  לכל פולינום מעל  $\mathbb{F}$ .

## הוכחה

לכל פולינום מתוקן  $f \in \mathbb{F}[x]$  נצמיד משתנה  $t_f$ . נתבונן בחוג  $R = \mathbb{F}[t_f]$ . לכל  $f$

$$I = \langle f(t_f) \rangle_{\forall f} \triangleleft R$$

נניח לרגע ש $1 \in I$  אז

$$1 = \sum h_i(\dots) f_i(t_{f_i})$$

מכיוון שמשותפים בסכום מספר סופי של פולינומים, קיימת הרחבה  $K/\mathbb{F}$  שבה לכל הפולינומים הללו יש שורשים.

נגדיר הומו  $R \rightarrow K$ :

$$t_f \mapsto \begin{cases} \alpha_f & f \in \{f_i\} \\ \alpha \text{ root of } f & \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מכיוון ש $1 \neq 0$ , אין הומומורפיזם כזה ולכן  $1 \notin I$ . לכן  $I$  אידיאל אמיתי. לפי הלמה של צורן יש אידיאל מקסימלי  $I \subseteq M \triangleleft R$ . נבחר  $E = R/M$ . אז לכל  $f$ ,  $t_f + M \in E$  הוא שורש.

## למה

תהי  $E/\mathbb{F}$  הרחבה אלגברית. אם  $E$  מפצל כל פולינום עם מקדמים ב $\mathbb{F}$  אז  $E$  סגור אלגברית.

## משפט

יהי  $\mathbb{F}$  שדה. אזי יש לו סגור אלגברי = הרחבה אלגברית שהיא סגורה אלגברית.

## הוכחה

נסמן  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0$ . לכל  $n$ , אחרי שבנינו את  $\mathbb{F}_n$ , ניקח  $\mathbb{F}_{n+1}$  שדה כמו בלמה. ניקח  $E = \bigcup \mathbb{F}_n$ .

## עוד דברים שצריך להוכיח:

1. הסגור האלגברי יחיד עד כדי איזומורפיזם.
2. הסגור האלגברי של  $\mathbb{Q}$  הוא  $\mathbb{Q}$  בן מניה.