תזכורת

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

$\mathbb{F}[x]$ תחום אוקלידי $\Longleftarrow$ ראשי $\Longleftarrow$כל אי־פריק הוא ראשוני.

אם f פולינום אי־פריק אז $\langle f\rangle \lhd \mathbb{F}[x]$) אידיאל מקסימלי $\Longleftarrow$ $\mathbb{F}[x]/\langle f(x)\rangle$ שדה). $(*)$

יהי f פולינום כלשהו.

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}/\mathbb{F}\cap\langle f\rangle \cong \mathbb{F} + \langle f\rangle/\langle f\rangle \hookrightarrow \mathbb{F}[x]/\langle f\rangle$$

$\mathbb{F}[x]/\langle f(x)\rangle$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. בסיס: $1, x, \dots x^{n-1}$(הוכחה אוקלידית).

לסיכום, $\dim_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[x]/\langle f\rangle\right) = \deg(f)$.

טענה

נניח שf אי־פריק. אז בשדה $K = \mathbb{F}[x]/\langle f\rangle \supseteq \mathbb{F}$ יש שורש לפולינום f: $x + \langle f\rangle$.

הוכחה: $f(x + \langle f\rangle) = f(x) + \langle f\rangle = 0 + \langle f\rangle$

המסר הוא שלכל פולינום אפשר למצוא שורש ־ אם לא בשדה שלו אז בשדה יותר גדול שמכיל אותו.

הומומורפיזם ההצבה

יהי K שדה כלשהו המכיל את $\mathbb{F}$. יהי $a \in K$. אפשר להגדיר הומומופריזם $\Phi_a : \mathbb{F}[x] \to K$ ע"י $\Phi_a(f) = f(a)$.

$$F[a] := \mathrm{Im}\Phi_a$$

$$\ker\Phi_a = \{g | g(a) = 0\} \lhd \mathbb{F}[x]$$

אם $\ker\Phi_a = 0$, אומרים שa טרנצנדנטי מעל $\mathbb{F}$.

$$\mathbb{F}[a] \cong \mathbb{F}[x]/\ker\Phi_a$$

אם יש פולינומים המאפסים את a, יש יוצר h של $\ker\Phi_a$.

$$h(x) \mid g(x) \iff g(a) = 0$$

בפרט מעלת h מינימלית בין הפולינומים ב$\ker\Phi_a$ $\Longleftarrow$ הפולינום המינימלי של a

$$\boxed{\mathbb{F}[x]/\langle h\rangle \equiv \mathbb{F}[x]} \subseteq K$$

מכאן שK שדה.

h אי־פריק, ולפי $(*)$ $\mathbb{F}[a]$ שדה.

הערות

1. כל פולינום מינימלי של איבר בשדה הוא אי־פריק.
2. $[\mathbb{F}(a):\mathbb{F}]$ שווה למעלה של הפולינום המינימלי של a.

מסקנה

אם $g(a)=0$ ו$[\mathbb{F}(a):\mathbb{F}]=\deg g$

דוגמה

$$a=\sqrt{2}+\sqrt{7}\in\mathbb{C}$$

$$a^2=9+2\sqrt{14}$$

$$\left(a^2-9\right)^2=4\cdot 14$$

$$a^4-18a^2+35=0$$

אם נוסיף לרציונאלים את a נקבל $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{7}\right]=\mathbb{Q}[a]$(לא טריוויאלי שאפשר לקבל $\sqrt{2},\sqrt{7}$ בנפרד באמצעות a)
מוכיחים ש$\sqrt{7}\notin\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ ואז נובע ש$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{7}\right):\mathbb{Q}\right]=4$ ולכן a^4-18a^2+35 אי־פריק.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{7}\right) \arrow[dl, dash, "\leq 2"'] \arrow[dr, dash, "\leq 2"] & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \arrow[dr, dash, "2"'] & & \mathbb{Q}\left(\sqrt{7}\right) \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

הגדרה

.$f\in\mathbb{F}[x]$
$\mathbb{F}\subseteq K$ מפצל את f אם יש $\alpha_1,\dots\alpha_n\in K$ כך ש$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$

משפט

לכל פולינום $f \in \mathbb{F}[x]$ יש שדה מפצל.

הוכחה

נפרק את הפולינום לגורמים אי־פריקים מעל $\mathbb{F}$.

אם כל הגורמים לינאריים ־ גמרנו.

אחרת, נבחר גורם אי־פריק $f_1 \mid f$ ונעבור לשדה $\mathbb{F}_1 = {}^{\mathbb{F}[x]}/_{\langle f_1 \rangle}$.

ממשיכים באופו אופן: בכל פעם עוברים להרחבה שבה יש שורש לאיזשהו גורם אי־פריק לא לינארי של f.

הוכחנו: יש שדה מפצל ממימד $\leq (\deg f)!$

הגדרה

$a \in E$ אלגברי אם יש פולינום $h \in \mathbb{F}[x]$ כך ש$h(a) = 0$.

הגדרה

הרחבה ${}^{E}/_{F}$ נקראת <u>אלגברית</u> אם כל האיברים של E אלגבריים.

לדוגמה: $[E:F]$ סופי$\Longleftarrow$אלגברי. ${}^{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11},\ldots]}/_{\mathbb{Q}}$ הרחבה אלגברית ממימד ∞.

$\mathbb{F}(t) = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \middle| \begin{array}{c} f, g \text{ polynoms} \\ g \neq 0 \end{array} \right\}$ לא אלגברי כי t לא אלגברי.

הגדרה

$\mathbb{F} \subseteq E$ שדות. E נוצר על ידי $S \subseteq E$ מעל $\mathbb{F}$ אם אין תת־שדות אמיתיים של E המכילים את $\mathbb{F}$ ואת S.

הגדרה

E נוצר סופית אם הוא נוצר ע"י קבוצה סופית.

משפט

התכונות הבאות של ${}^{E}/_{\mathbb{F}}$ שקולות:

1. $[E:\mathbb{F}] < \infty$
2. ${}^{E}/_{\mathbb{F}}$ אלגברית ונוצרת סופית.
3. E נוצרת ע"י קבוצה סופית של איברים אלגבריים.

הוכחה

$2 \Longleftarrow 1$ אלגבריות - טרוייואלי

$3 \Longleftarrow 2$ לקרוא

$1 \Longleftarrow 3$ $E = F\left[a_1, \dots a_t\right]$, כל a_i אלגברי מעל F.

a_t מאפס פולינום $h_t \in \mathbb{F}\left[x\right]$ ממעלה n_t

$$\begin{tikzcd}
 & E = E_0\left[a_t\right] \arrow[dl, dash, "\le n_t"'] \arrow[dr, dash] & \\
E_0 = F\left[a_1, \dots a_{t-1}\right] \arrow[dr, dash, "\text{finite - by induction}"'] & & F\left[a_t\right] \arrow[dl, dash, "n_t"] \\
 & F &
\end{tikzcd}$$

$$\left[E : \mathbb{F}\right] = \left[E : E_0\right] \cdot \left[E_0 : \mathbb{F}\right] \le n_t \cdot \left[E_0 : \mathbb{F}\right] < \infty \Longleftarrow$$

מסקנה

תהי $L \supseteq \mathbb{F}$ הרחבה כלשהי.

לכל $a, b \in L$ אלגבריים, גם $a + b, ab, \frac{1}{a}$ אלגבריים.

הוכחה

$a + b, a \cdot b, a^{-1} \in \mathbb{F}\left[a, b\right]$ ו$\mathbb{F}\left[a, b\right]$ אלגברי כי $3 \Longleftarrow 2$.

לכן **הסגור האלגברי של** $\mathbb{F}$ **בתוך** L, שהוא אוסף האברים של L שהם אלגבריים מול $\mathbb{F}$, הוא תת־שדה.

מסקנה נוספת

הרחבה אלגברית נוצרת סופית
של הרחבה אלגברית נוצרת סופית
היא הרחבה אלגברית נוצרת סופית

הוכחה

$1 \Longleftarrow 2$

(בפרט, אם $K/\mathbb{F}$ אלגברית וα אלגברי מעל[1] K, אז α אלגברי מעל $\mathbb{F}$.

[1] ''אלגברי מעל'' = ''מאפשר פולינום שמקדמיו ב''

נסמן ב$\beta_0,\dots\beta_m \in K$ את מקדמי הפולינום שα מאפס. אז α אלגברי מעל $K_0 = \mathbb{F}\left[\beta_0,\dots\beta_m\right] \subseteq K$.

$$\begin{tikzcd}
& K\left(\alpha\right) \arrow[d, dash] \\
K_0\left[\alpha\right] \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & \\
& K \\
K_0 \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash, "<\infty"'] & \\
F \arrow[uuu, dash, bend left, "\text{finite}"] &
\end{tikzcd}$$

שדות סגורים אלגבריים

משפט

התנאים הבאים שקולים עבור שדה E:

1. לכל פולינום מעל E יש שורש.
2. כל פולינום מעל E מתפצל בE.
3. אין לE הרחבות אלגבריות $> E$.
4. אין לE הרחבות סופיות $> E$.
5. כל פולינום אי פריק הוא לינארי.

הוכחה

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, Rightarrow, bend left] & 2 \arrow[l, Leftarrow] & 5 \arrow[l, Leftarrow] \arrow[rr, Rightarrow, bend left] & 4 \arrow[l, Leftarrow] & 3 \arrow[l, Leftarrow]
\end{tikzcd}$$

הגדרה

שדה כזה נקרא <u>סגור אלגברית</u>.

למה

תהי ${}^{E}/_{\mathbb{F}}$ הרחבה אלגברית.
אם E מפצל כל פולינום עם מקדמים ב$\mathbb{F}$, אז E סגור אלגברית.

הוכחה

יהי $f \in E\left[x\right]$ פולינום אי־פריק מעל E.
נסמון ב$\mathbb{F}_1$ את השדה הנוצר מעל $\mathbb{F}$ על־ידי המקדמים של f.
יהי α שורש של f בשדה הרחבה של E. יש לו פולינום מינימלי מעל $\mathbb{F}$, שמתפצל בE לפי ההנחה, ולכן $\alpha \in E$.

למה

לכל שדה $\mathbb{F}$ יש הרחבה אלגברית E עם שורש בE לכל פולינום מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה

לכל פולינום מתוקן $f \in \mathbb{F}\left[x\right]$ נצמיד משתנה t_f. נתבונן בחוג $R = F\left[t_f\right]$. לכל f

$$I = \left\langle f\left(t_F\right)\right\rangle_{\forall f} \lhd R$$

נניח לרגע ש$1 \in I$. אז

$$1 = \sum h_i\left(\cdots\right) f_i\left(t_{f_i}\right)$$

מכיוון שמשתתפים בסכום מספר סופי של פולינומים, קיימת הרחבה ${}^{K}/_{\mathbb{F}}$ שבה לכל הפולינומים הללו יש שורשים.
נגדיר הומ' $R \to K$:

$$t_f \mapsto \begin{cases} \alpha_f & \begin{matrix} f \in \{f_i\} \\ \alpha \text{ root of } f \end{matrix} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מכיוון ש$0 \neq 1$, אין הומומורפיזם כזה ולכן $1 \notin I$. לכן I אידאל אמיתי.
לפי הלמה של צורן יש אידיאל מקסימלי $I \subseteq M \lhd R$. נבחר $E = {}^{R}/_{M}$. אז לכל f, $t_f + M \in E$ הוא שורש.

למה

תהי ${}^{E}/_{\mathbb{F}}$ הרחבה אלגברית.
אם E מפצל כל פולינום עם מקדמים ב$\mathbb{F}$ אז E סגור אלגברית.

משפט

יהי $\mathbb{F}$ שדה. אזי יש לו סגור אלגברי = <u>הרחבה אלגברית שהיא סגורה אלגברית</u>.

הוכחה

נסמן $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}$. לכל n, אחרי שבנינו את $\mathbb{F}_n$, ניקח $\mathbb{F}_{n+1}$=שדה כמו בלמה. ניקח $E = \bigcup \mathbb{F}_n$.

עוד דברים שצריך להוכיח:

1. הסגור האלגברי יחיד עד כדי איזומורפיזם.
2. הסגור האלגברי של $\mathbb{Q}$ הוא בן מניה.