הרצאה 19

R תחום ראשי, M מודול נוצר סופית.

משפט המיון: M איזומורפי למכפלה ישרה של מספר סופי של מודולים ציקליים.

1) גורמים אינווריאנטיים

$$M \simeq R^r \times R/(d_1) \times \cdots \times R/(d_n)$$

כאשר האידיאלים $R \neq (d_1) \supseteq \cdots \supseteq (d_n) \neq (0)$

$(\Leftrightarrow)$ $d_1 | d_2 | \cdots | d_n$, d_i לא אפסים, לא הפיכים.
(מוגדרים עד כדי חברות)

ואז ה-(d_i) יחידים.

2) מחלקים אלמנטריים:

$$M \simeq R^r \times R/(p_1^{a_1}) \times \cdots \times R/(p_s^{a_s})$$

כאשר p_i אי-פריקים (לאו בהכרח שונים).
שוב האידיאלים $(p_i^{a_i})$ מוגדרים באופן יחיד.
(עד כדי שינוי סדר)

$$G = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \overbrace{\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}}^{\simeq\, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}}$$

$$\simeq \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^3\mathbb{Z}$$

נשאר להוכיח את היחידות.

1) ראינו לפני יומיים "מילון" שמגדיר בין הצגות של M בגורמים אינווריאנטיים והצגות במחלקים אלמנטריים.

2) בנקל להראות שיחידות של גורמים אינו' שקולה ליחידות של מחלקים אלמ'.

3) אנחנו נוכיח יחידות של מחלקים אלמ'.

4) נניח

$$M = R^r \times \overbrace{R/(p_1^{a_1}) \times \cdots \times R/(p_s^{a_s})}^{Tor(M)} \cong$$

$$R^r \times \underbrace{R/(q_1^{b_1}) \times \cdots \times R/(q_t^{b_t})}_{Tor(M)}$$

כבר הוכחנו שה-r מוגדר באופן יחיד.

מספיק להוכיח את המקרה של $M = Tor(M)$.

$$\left(\begin{array}{l} \varphi : M_1 \xrightarrow{\sim} M_2 \\ \varphi(Tor(M_1)) \xrightarrow{\sim} Tor(M_2) \end{array} \right)$$

5) יהי $p \in R$ איבר אי-פריק.

$$M \cong R/(p^{a_1}) \times R/(p^{a_2}) \times \cdots \times R/(p^{a_u}) \times \underbrace{\prod \left(R/(p_i')^{b_i} \right)}$$

$p_i' \not\sim p$ אי-פריקים אחרים

גורדן ול

$$\underbrace{\{m\in M \mid \mathrm{Ann}_R(m)=(p^n)\}}_{\text{נשמר תחת איזומורפיזמים}} \overset{\exists n\geq 0}{} = R/(p^{a_1}) \times \dots \times R/(p^{a_n})$$

6) נבחין למקרה של

$$M = R/(p^{a_1}) \times \dots \times R/(p^{a_n}) \simeq R/(p^{b_1}) \times \dots \times R/(p^{b_v})$$

7) נגדיר לכל $l\geq 0$

$$p^l M = \{p^l\cdot m : m\in M\} \leftarrow$$ תת-מודול של M

$$p^0M = M \supseteq pM \supseteq p^2M \supseteq p^3M \supseteq \dots$$

$r\in R$

$r\cdot p^l m = p^l(rm)$

כי R חילופי

$$p^{l+1}M \ni p^{l+1}\cdot m = p^l(pm)\in p^l M$$

8) נתבונן במנה $p^{l-1}M/p^l M$, $l\geq 1$.

המנה הנ"ל הינה R-מודול. כן

$$(p)\subseteq \mathrm{Ann}_R\left(p^{l-1}M/p^l M\right)$$

$$p\cdot\left(p^{l-1}m + (p^l M)\right) = p^l m + p^l M = 0 + p^l M = 0_{p^{l-1}M/p^l M}$$

9) מקבלים מבנה של R/pR -מודול על

המנה $p^{l-1}M/p^lM$,

10) אם p אי-פריק, לכן ראשוני. לכן

$pR \trianglelefteq R$ אידיאל ראשוני לא אפסי.

R תחום ראשי $\Leftarrow$ $\dim R = 1$ $\Leftarrow$

pR הינו אידיאל מקסימלי. לכן R/pR <u>שדה</u>.

11)
$$M \simeq R/(p^{a_1}) \times \dots \times R/(p^{a_n})$$

$F = R/pR$ שדה. <u>בתרגיל</u>

$$\dim_F \left(p^{l-1}M/p^lM\right) = \#\{1 \le i \le n \mid a_i \ge l\}$$

12) נניח כי

$$M \simeq R/(p^{a_1}) \times \dots \times R/(p^{a_n}) \simeq R/(p^{b_1}) \times \dots \times R/(p^{b_v})$$

לפי הסעיף הקודם

$$\dim_F \left(p^{l-1}M/p^lM\right) = \#\{1 \le i \le n \mid a_i \ge l\} =$$
$$\#\{1 \le i \le v \mid b_i \ge l\}$$

3) זה אומר ש- $(a_1,\dots,a_n) = (b_1,\dots,b_v)$

עד כדי מספור מחדש של ה- ק׳ים (בפרט $v=n$).

<u>השלכות של המשפט</u>

1) $R=\mathbb{Z}$ משפט המיון של חבורות אבליות נוצרות סופית.

2) $R=F[x]$, כאשר F שדה.

M מודול $F[x]$- $\Longleftrightarrow$ (מ"ו V מעל F (עם $V=M$ כפל סקלרי רק בסקלרים של F)

$+$

$T:V\to V$

העתקה לינארית

$T(v)=x\cdot v$.

<u>תזכורת של הגדרה</u>

יהי $g(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ פולינום מתוקן.

מטריצה הנלווה

$$C_g=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

הפולי' האופייני של C_g הינו $g(x)$.

טענה (צורה רציונלית קנונית של מטריצה).

יהי F שדה, $A\in M_n(F)$, אזי A דומה למטריצה יחידה מן הצורה

$$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & & \\ & C_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{d_s}\end{pmatrix}$$

בלוק-אלכסונית, כל בלוק הינו C_{d_i}, הפולינומים d_i מתוקנים, לא-קבועים, ומקיימים $d_1|d_2|\dots|d_s$.

הוכחה יהי M ה-$F[x]$-מודול המקביל ל-$V=F^n$ (בסיס סטנדרטי $e_1,\dots,e_n$)

$T:F^n\to F^n \leftrightarrow A$ בבסיס הזה.

M נוצר סופית מעל F, לכן על $F[x]$.

(משפט המיון ⇐ "גורמים אינו׳")

$$M\cong F[x]^r\times F[x]/(d_1)\times\dots\times F[x]/(d_s)$$

($d_1|\dots|d_s$ ואם נדרוש d_i מתוקנים, הם מוגדרים באופן יחיד)

בהכרח $r=0$

($M=V$ סוף-מימדי מעל F, אבל $\dim_F F[x]=\aleph_0$

בסיס $\{1,x,x^2,x^3,\dots\}$)

לכן

$$M\cong F[x]/(d_1)\times\dots\times F[x]/(d_s)$$

נגדיר בסיס אחר של $V=M$.

לכל קומפוננטה $F[x]/(d_i)$ ניקח את הבסיס

$$\left(1+(d_i),\ x+(d_i),\ \ldots,\ x^{\deg d_i -1}+(d_i)\right)$$

הוכחנו בעבר שזוהי הנה בסיס ושהכפל הסקלרי ב-x $\quad T_i : F[x]/(d_i) \to F[x]/(d_i)$

$$g+(d_i) \to xg+(d_i)$$

מתאימה למטריצה C_{d_i}.

ניקח בסיס של $V=M\cong F[x]/(d_1)\times\cdots\times F[x]/(d_s)$

שהוא השרשור של הבסיסים של ה-$F[x]/(d_i)$.

אז כפל סקלרי ב-x, $T:V\to V$ עבור הבסיס הזה

מתאים למטריצה

$$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_s}\end{pmatrix}.$$

A ו-$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_s}\end{pmatrix}$ מייצגות אותה העתקה בבסיסים

שונים, לכן דומות:

$$A = S^{-1}\begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_s}\end{pmatrix}S$$

$S \leftrightarrow$ מטריצת שינוי הבסיס.

<u>מסקנה</u> (משפט קיילי - המילטון) תהי $A\in M_n(F)$.

ויהי $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ הפולינום האופייני.

אזי $f(A)=0$, במובן ש:

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I_n=0$$

<u>הוכחה</u> אם הטענה נכונה עבור A, היא נכונה לכל מטריצה דומה ל-A.

אכן, ל- $S^{-1}AS$ יש אותו פול' אופייני,

$$S^{-1}A^nS+\dots+a_1S^{-1}AS+a_0I_n=$$

$$S^{-1}(A^n+\dots+a_1A+a_0I_n)S=S^{-1}0S=0$$

לכן מספיק להוכיח את המשפט עבור מטריצות מן הצורה

$$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_s}\end{pmatrix}.$$

הפול' האופייני הוא $f(x)=d_1(x)d_2(x)\cdots d_s(x)$,

אבל המט' הנ"ל מייצגת כפל ב-x במודול

$$M=F[x]/(d_1)\times\dots\times F[x]/(d_s)$$

$$Ann_{F[x]}(M) = (d_s)$$

לכן $d_s | f \Leftarrow f \in Ann_{F[x]}(M)$.

ג.ה. $B = \begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_s} \end{pmatrix}$, אזי

$f(B)$ מייצג כפל סקלרי ב- $f(x) \in Ann_{F[x]}(M)$

אך הכפל הסקלרי הנ"ל הורג כל איבר
של M ולכן מיוצג ע"י 0.

צורת ז'ורדן

טענה נ.ה. $A \in M_n(F)$, נניח כי F מכיל
את כל הערכים העצמיים של A. אזי
A דומה=צמודה למטריצה בלוק אלכסונית
יחידה
מן הצורה
$$\begin{pmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_t \end{pmatrix}$$
וכל בלוק

הוא כמו
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$
עבור ע"ע λ של A.

הוכחה מ-A מקבלים M כמו F[x]-מודול

כמו בהוכחות הקודמות: משפט המיון (למודולים אלמנטריים) ⇐

$$M \simeq F[x]/(p_1^{a_1}) \times \dots \times F[x]/(p_t^{a_t})$$

כאשר ה-p_i-ים אי-פריקים. הפולי' האופייני $f(x)$ של A הינו $p_1^{a_1}\cdots p_t^{a_t}$.

F מכיל את כל הע"ע של A ⇐

$$f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$$

הפירוק ב-F[x] ⇐ $p_i(x) = x-\lambda_i$ לכן

$$M \simeq F[x]/(x-\lambda_1)^{a_1} \times \dots \times F[x]/(x-\lambda_t)^{a_t}$$

ניקח את הבסיס

$$\left(1+(x-\lambda_i)^{a_i},\ (x-\lambda_i)+(x-\lambda_i)^{a_i},\ \dots,\ (x-\lambda_i)^{a_i-1}+(x-\lambda_i)^{a_i}\right)$$

של $F[x]/(x-\lambda_i)^{a_i}$. ביחס לבסיס הנ"ל, כפל סקלרי ב-x מיוצג ע"י

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$