פעולות של חבורות על קבוצות

הגדרה: תהי G חבורה וX קבוצה, פעולה של G על X היא פונקציה

$$G \times X \to X$$

מסמנים ב$g * x$ (זה האיבר שאליו נשלח הזוג (g, x)) ולפעמים רק בgx,
שמקיימת 2 תכונות:
1. אסוציאטיביות: לכל $g_1, g_2 \in G$ ולכל $x \in X$ מתקיים: $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$
2. נטרליות איבר היחידה: לכל $x \in X$ $e * x = x$.

דוגמאות:
1. S_n פועל על הקבוצה $\{1, .., n\}$ באופן טבעי. $\sigma * i = \sigma(i)$ (זיכרו שכל איבר בS_n הוא פונקציה על הקבוצה $\{1, .., n\}$)
2. S_n פועל על פולינומים בn משתנים. כלומר $\mathbb{F}[x_1, .., x_n]$, ע"י כך שכל איבר בS_n עושה תמורה על המשתנים של הפולינום.
למשל

$$(1, 2, 3) * (x_1^2 x_2 - 3x_2 x_3 + x_1) = (x_2^2 x_3 - 3x_3 x_1 + x_2)$$

3. D_n פועלת על מצולע משוכלל עם n צלעות באופן טבעי.
4. $GL_n(\mathbb{F})$ פועלת על $\mathbb{F}^n$ ע"י $A * v = Av$
5. G פועלת על עצמה ע"י הצמדה.

$$g * x = g^{-1} x g$$

6. G פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל

$$g * x = gx$$

7. מתי כפל מימין יוצר פעולה של G על עצמה?

$$g * x = xg$$

פתרון: הניטרליות של איבר היחידה מתקיימת.
אסוציאטיביות:

$$g_1 * (g_2 * x) \stackrel{?}{=} (g_1 g_2) * x$$

$$g_1 * (g_2 * x) = g_1 * (x g_2) = x g_2 g_1$$

$$(g_1 g_2) * x = x(g_1 g_2)$$

בחבורה אבלית נקבל שוויון. ובשביל שיהיה שוויון אז החבורה חייבת להיות אבלית כי אפשר לצמצם את x ולקבל $g_1g_2 = g_2g_1$

8. G על כל תת חבורה נורמלית שלה ע"י הצמדה.

$$g * h = g^{-1}hg$$

ומכיוון שH נורמלית אז התוצאה היא איבר בתוך H

9. אם $H \leq G$ אז G פועלת על קבוצת המנה, כלומר אוסף הקוסטים, ע"י כפל משמאל.

$$g_1 * (g_2H) = g_1g_2H$$

הגדרה: נגיד שהפעולה של G על X היא "נאמנה" אם האיבר היחיד שמשאיר את כל איברי הקבוצה במקום הוא e.

כלומר, ידוע שלכל x, $ex = x$. הפעולה היא נאמנה אם האיבר היחיד שמקיים שלכל x $gx = x$ הוא $g = e$.

דוגמאות:

1. S_n פועל על הקבוצה $\{1, .., n\}$ באופן טבעי- נאמנה. התמורה היחידה שמשאירה כל איבר במקום היא תמורת הזהות.
2. S_n פועל על פולינומים בn משתנים.- נאמנה.
3. D_n פועלת על מצולע משוכלל עם n צלעות באופן טבעי- נאמנה.
4. $GL_n(\mathbb{F})$ פועלת על $\mathbb{F}^n$ ע"י $A * v = Av$- נאמנה. המטריצה היחידה שמשאירה את כל הוקטורים במקום היא מטריצה היחידה. כי

$$Ae_i = e_i$$

$$Ae_i = c_i(A)$$

5. G פועלת על עצמה ע"י הצמדה.

$$g * x = g^{-1}xg$$

g פועל טריוויאלית על כל $x \in G$ אמ"ם

$$g^{-1}xg = x$$

אמ"ם

$$xg = gx$$

אמ"ם g מתחלף עם כל האיברים, כלומר g שייך ל$Z(G)$.

למשל, בS_n עבור $n \geq 3$ הפעולה נאמנה.

אבל בD_{2n} יש מרכז לא טריוויאלי ולכן הפעולה לא נאמנה.

הגדרה. נניח שG פועלת על X. לכל $x \in X$ מגדירים:

1. המסלול של x:

$$orb(x) = \{gx : g \in G\} \subseteq X$$

2. המייצב של x:

$$stab(x) = \{g \in G : gx = x\} \leq G$$

דוגמה. בפעולה של $GL_n(\mathbb{F})$ על $\mathbb{F}^n$ המסלולים הם: $\{0\}$ ו$\mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, כי לכל$v, u \neq 0$, ניתן להשלים את שניהם לבסיס ולהגדיר הע"ל שתשלח את הבסיס הראשון לשני כך שv נשלח לu. יש מטריצה A שמייצגת את ההעתקה הזאת, ולכן $Av = u$.

דוגמה. בפעולה של S_4 על פולינום עם 4 משתנים. חשבו את המסלול והמייצב של $x_1x_2 + x_3x_4$

$$orb(x_1x_2 + x_3x_4) = \{x_1x_2 + x_3x_4, x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3\}$$

$$stab(x_1x_2+x_3x_4) = \{(1,2),(3,4),e,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3),(1,3,2,4),(4,2,3,1)\}$$

משפט. משפט מסלול מייצב: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$[G : stab(x)] = |orb(x)|$$

(שוויון של עוצמות)
אם G היא חבורה סופית אז

$$|G| = |stab(x)||orb(x)|$$

הגדרה. בפעולה של חבורה על עצמה ע"י הצמדה, יש לנו הגדרות מיוחדות. מסלול של איבר נקרא מחלקת צמידות, ומסמנים ב$conj(x)$ (כל האיברים שצמודים לx). ומייצב של x נקרא גם ה"מרכז" $centralizer$ $C_G(x)$- אוסף האיברים בG שמתחלפים עם x.

בS_n יש דרך פשוטה לחשב הצמדות:

$$\sigma(x_1, .., x_k)\sigma^{-1} = (\sigma(x_1), ..\sigma(x_k))$$

דוגמה. $\sigma = (1,3)(4,5,6)$ ו$\tau = (1,4,5)$
חשבו:
$\sigma\tau\sigma^{-1}$
$\tau\sigma\tau^{-1}$
פתרון:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (3,5,6)$$

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (4,3)(5,1,6)$$

טענה. בS_n מחלקות הצמידות הן כל התמורות עם אותו מבנה מחזורים.

תרגיל. בS_n חשבו כמה תמורות מתחלפות עם $(1,2)(3,4)$

פתרון. התמורות שמתחלפות עם $(1,2)(3,4)$ זה בעצם המייצב של $(1,2)(3,4)$ עם פעולת ההצמדה. אז אנחנו רוצים לחשב את הגודל של המייצב. לפי משפט משלול מייצב זה שווה לגודל החבורה חלקי גודל המסלול של $(1,2)(3,4)$. אנחנו יודעים שהמסלול שווה לכל התמורות עם אותו מבנה מחזורים. אז אנחנו צריכים לחשב כמה תמורות בS_n הן מכפלה של 2 מחזורים מאורך 2.

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

מספר האיברים שמתחלפים עם $(1,2)(3,4)$ הוא

$$\frac{n!}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}}$$

תרגיל. תהי G חבורה עם יותר משני איברים שפועלת על X, ונניח שיש איבר בX שהמסלול שלו מאורך 2. הוכיחו שG אינה חבורה פשוטה.

פתרון. לפי משפט מסלול-מייצב, יש x שהמסלול שלו מאורך 2, אז המייצב שלו הוא מאינדקס 2. ואנחנו יודעים שכל תת חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית. היא לא שווה לG כי אחרת הייתה מאינדקס 1. והיא לא $\{e\}$ כי $|G| = [G : \{e\}]$

הגדרה. תהי G חבורה שפועלת על X. נקודת שבת של הפעולה היא איבר $x \in X$ שמקיים $orb(x) = \{x\}$. מסמנים את אוסף נקודות השבת ב$fp(X)$

משפט. משוואת המחלקות: אם G פועל על X אז

$$|X| = |fp(X)| + \sum_{x \notin fp(X)} |orb(x)|$$

הערה. ממשפט מסלול-מייצב אנחנו מסיקים שלכל $x \in X$, $|G| \mid |orb(x)|$. (בפרט, עבור פעולת ההצמדה נקבל שהגודל של כל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה)

תרגיל. החברה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ $= G$ פועלת על קבוצה מגודל 223. הוכיחו שיש בפעולה נקודת שבת.

פתרון. $|G| = 27$. הגדלים של המסלולים מחלקים את 27 ולכן הם יכולים להיות $1, 3, 9, 27$.
אנחנו רוצים להוכיח שיש לפחות מסלול אחד מאורך 1 .

$$|X| = 223 = a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 9 + d \cdot 27$$

כאשר המקדם מציין את מספר המסלולים השונים מאותו גודל.
אם אין נקודות שבת אז $a = 0$.
אבל אז נקבל ש223 הוא כפולה של 3, סתירה.

טענה. בהרצאה הוכחתם בהסתמך על משוואת המחלקות שהמרכז של חבורת p, כלומר חבורה שהסדר שלה הוא p^n עבור p ראשוני כלשהו, הוא לא טריוויאלי (לא רק $\{e\}$).

תרגיל. תהי G חבורה, ונניח שמתקיים ש$G/Z(G)$ היא ציקלית. הוכיחו שG חבורה אבלית.

פתרון. יהיו $a, b \in G$. $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$.

$$aZ(G) = (gZ(G))^n = g^n Z(G)$$

כלומר, $a = g^n x$ כאשר $x \in Z(G)$
באותו אופן נראה ש$b = g^m y$ כאשר $y \in Z(G)$.
ולכן

$$ab = g^n x g^m y = g^n g^m xy = g^m g^n yx = g^m y g^n x = ba$$

איברים במרכז אפשר להחליף עם כל איבר, וחזקות של g מתחלפות אחת עם השניה.
הראינו שאם $G/Z(G)$ היא ציקלית, אז G אבלית. אבל אם G אבלית אז $Z(G) = G$. ואז $G/Z(G) = \{e\}$

מסקנה. $G/Z(G)$ לא יכול לצאת אף פעם חבורה ציקלית שאינה החבורה הטריוויאלית.

מסקנה. אם $|G| = p^n$ אז $Z(G) \neq \{e\}$ ועכשיו גילינו שגם $|Z(G)| \neq p^{n-1}$, כי אז $|G/Z(G)| = p$ וכל חבורה מגודל p היא ציקלית.

תרגיל. תהי G חבורה מסדר p^n ו$H \trianglelefteq G$ כך ש$|H| = p$. הוכיחו ש$H \leq Z(G)$.

פתרון. אנחנו רוצים להוכיח שכל איבר בH שייך למרכז. שקול להוכיח ש$orb(x) = x$ ביחס לפעולת ההצמדה. כלומר, $conj(x) = x$. כלומר, שקול להוכיח שלכל $x \in H$, $|conj(x)| = 1$
אנחנו יודעים שגודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. לכן ...$|conj(x)| = 1 \vee p \vee p^2$
H היא תת חבורה נורמלית, כלומר, היא סגורה להצמדות, כלומר לכל $h \in H$ ו$g \in G$, $ghg^{-1} \in H$, זה אומר שלכל $h \in H$, $conj(h) \subseteq H$. ולכן $|conj(h)| = 1 \vee p$.
אם $|conj(h)| = p$ אז $conj(h) = H$. $e \in H$, וe צמוד רק לעצמו. אז לכל $e \neq h \in H$, $e \notin conj(h)$. לכן $|conj(h)| \neq p$. כלומר $|conj(h)| = 1$. מש"ל.