<u>אלגברה מופשטת 3 – תרגול 9</u>

תרגיל: מצאו את שדה הפיצול, חבורת גלואה, וכל שדות הביניים של $f(x)=x^4-6x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$.

פתרון:

x^4-6x^2-2 פולינום אי פריק לפי אייזנשטיין.

t שורש של x^4-6x^2-2 אם ורק אם $t^2=\frac{6\pm\sqrt{36+8}}{2}=3\pm\sqrt{11}$. לכן, שורשי הפולינום x^4-6x^2-2 הם $\pm\sqrt{3\pm\sqrt{11}}$. לכן, שדה הפיצול של x^4-6x^2-2 מעל $\mathbb{Q}$ הוא $E=\mathbb{Q}\left[\pm\sqrt{3\pm\sqrt{11}}\right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{11}},\sqrt{3-\sqrt{11}}\right]$.

כדי לחשב את המימד $[E:\mathbb{Q}]$ נגדיר $K=\mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{11}}\right]$. $\sqrt{3+\sqrt{11}}$ הוא שורש של x^4-6x^2-2 וזה פולינום אי פריק (אייזנשטיין ביחס ל-2). לכן $[K:\mathbb{Q}]=\deg(x^4-6x^2-2)=4$.

נשים לב ש-$\sqrt{11}\in K$ (בדקו!) לכן $\left(\sqrt{3-\sqrt{11}}\right)^2\in K$. זה אומר ש-$[E:K]\le 2$. אם $[E:K]=1$ אז $\sqrt{3-\sqrt{11}}\in K$ אבל זה בלתי אפשרי כי $\sqrt{3-\sqrt{11}}\notin\mathbb{R}$ ו-$K\subseteq\mathbb{R}$ (כי $\sqrt{3+\sqrt{11}}\in\mathbb{R}$). לכן, $[E:K]=2$ וקיבלנו ש-$[E:\mathbb{Q}]=[E:K][K:\mathbb{Q}]=2\cdot 4=8$.

קיבלנו $Gal(E/\mathbb{Q})$ היא תת-חבורה מסדר 8 של S_4, ולכן בהכרח החבורה איזומורפית ל D_4.

עלינו למצוא כעת אוטומורפיזמים יוצרים של החבורה, $\sigma^4=1,\tau^2=1$ כך שמתקיים $\tau\sigma\tau=\sigma^3$.

נסמן $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{3+\sqrt{11}}$, $\alpha_{3,4}=\pm\sqrt{3-\sqrt{11}}$. כל ההרחבות בתרשים הן הרחבות גלואה מדרגה 2:

$$\begin{tikzcd}
 & E=\mathbb{Q}(\alpha_1,..,\alpha_4) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
F(\alpha_1) \arrow[dr, dash] & & F(\alpha_3) \arrow[dl, dash] \\
 & F=\mathbb{Q}(\sqrt{11}) \arrow[d, dash] & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

מתקיים $Gal(E/\mathbb{Q}(\sqrt{11}))\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (לפי תרגיל מתרגול 7).

בנוסף האוטומורפיזם הלא טריויאלי ב $E/F(\alpha_1)$ קובע את השורשים α_1,α_2 ולכן חייב להיות האוטומורפיזם שפועל כתמורה $(3,4)$. בצורה דומה האוטומורפיזם הלא טריויאלי ב $E/F(\alpha_3)$ פועל כמו התמורה $(1,2)$.

נשים לב ש $\alpha_1\alpha_3=\sqrt{-2}\in E$. ולכן $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ שדה ביניים של $E/\mathbb{Q}$.

ההרחבה $\mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_3)/\mathbb{Q}$ היא שדה ביניים שמכיל את $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, כי $(\alpha_1+\alpha_2)^2=6+2\sqrt{-2}$. רואים גם ש $\mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_3)/\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ היא הרחבה מדרגה 2. לכן $\mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_3)/\mathbb{Q}$ היא הרחבה מדרגה 4. הפולינום $f(x)$ מתפרק מעל $\mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_3)$:

$$f(x)=x^4-6x^2-2=(x^2+(\alpha_1+\alpha_3)x+\sqrt{-2})(x^2-(\alpha_1+\alpha_3)x+\sqrt{-2})$$

ניתן לראות ששני הגורמים מדרגה 2 אינם יכולים להיות פריקים מעל $\mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_3)$ כיוון שאחרת הפולינום היה מתפצל, אבל שדה הפיצול הוא מדרגה 8.

לכן האיבר הלא טריויאלי של חבורת גלואה $Gal(E/\mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_3))\cong\mathbb{Z}_2$ מחליף בין שני השורשים של $(x^2-(\alpha_1+\alpha_3)x+\sqrt{-2})$ ובין שני השורשים של $(x^2+(\alpha_1+\alpha_3)x+\sqrt{-2})$ (בו זמנית). השורשים הם α_1,α_3 ו α_2,α_4 בהתאמה. לכן התמורה המתאימה היא $\pi=(13)(24)$.

לכן קיימת בחבורת גלואה התמורה $\sigma=\pi(12)=(13)(24)(12)=(1423)$.

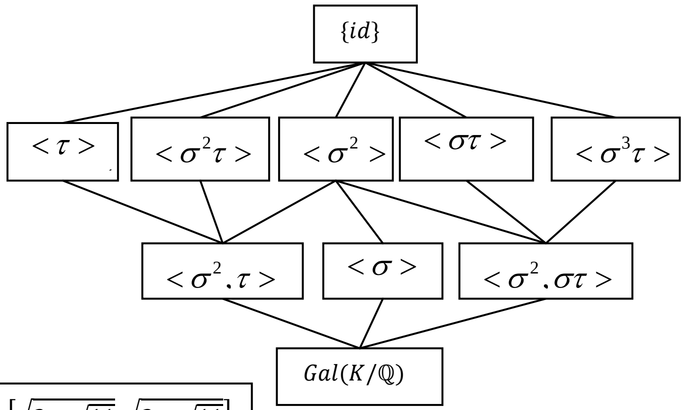
כעת $D_4=<\sigma=(1423),\tau=(12)>$.

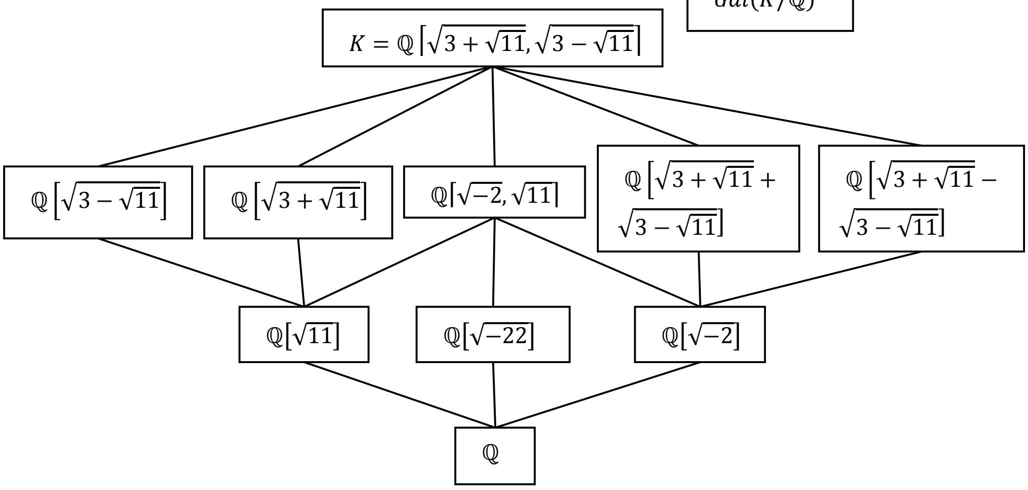
יש 10 ת"ח של D_4:

הטריויאליות: $\{(1)\},D_4$

מסדר 2: $<\sigma^2=(12)(34)>,<\tau=(12)>,<\sigma\tau=(13)(24)>,<\sigma^2\tau=(34)>,<\sigma^3\tau=(14)(23)>$ (רק $Z(D_4)=<\sigma^2>$ היא תח"נ).

מסדר 4: $<\sigma=(1423)>,<\sigma^2=(12)(34),\tau=(12)>,<\sigma^2=(12)(34),\sigma\tau=(13)(24)>$ (אלה כולן תח"נ – כי הן מאינדקס 2)





<u>חישוב הפולינום הציקלוטומי Φ_n :</u>

משפט:

1. $\Phi_n=\frac{x^n-1}{\prod_{d|n,d<n}\Phi_d}$;
2. $\deg\Phi_n=\varphi(n)=|U_n|$.

<u>חישוב Φ_{15}:</u> לפי הנוסחה $\prod_{d|n}\Phi_d=x^n-1$ מתקיים

$$\Phi_{15}=\frac{x^{15}-1}{\Phi_5\Phi_3\Phi_1}=\frac{x^{15}-1}{(x^5-1)\Phi_3}=\frac{x^{10}+x^5+1}{\Phi_3}=\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$$

(השוויון האדום חושב בעזרת חילוק ארוך של פולינומים.)

<u>חישוב ψ_{16}:</u> מתקיים $\Phi^{16}-1=(x^8+1)(x^8-1)$. השורשים של Φ_{16} הם שורשי יחידה 16-פרימיטיביים ולכן אף אחד מהם לא מאפס את x^8-1. לכן $\gcd(x^8-1,\Phi_{16})=1$. היות ו-$\Phi_{16}|x^{16}-1$ נובע שבהכרח $\Phi_{16}|x^8+1$. ידוע ש-$\deg\Phi_{16}=\varphi(16)=16\left(1-\frac{1}{2}\right)=8$ ולכן $\Phi_{16}=x^8+1$.