פתרון בוחן - ליניארית 1 – 2011

שאלה 1

יהיו $A\in F^{m\times n},\ B\in F^{n\times k}$ מטריצות.

הוכיחו שאם העמודות של AB בת"ל אזי גם העמודות של B הן בת"ל.

פתרון:

העמודות של AB בת"ל ולכן $rank(AB)=k$ (כאשר k זה בדיוק מספר העמודות של AB).
כמו כן ראינו שמתקיים $rank(AB)\le rank(B)$ ולכן $rank(B)\ge k$. אך במטריצה B יש רק k עמודות ולכן $rank(B)=k$ ולכן $\dim C(B)=k$, משמע: העמודות של B הן בת"ל.

שאלה 2

נתונות בשתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&3&1&-1\\3&3&1&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. חשבו את הביטוי הבא: $\dim\left(C(B)\bigcap N(A)\right)$.

פתרון:

נמצא תחילה את $N(A)$. לשם כך נדרג את המטריצה ונקבל: $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$. המשתנה האחרון הוא משתנה חופשי, אזי נבטא דרכו את שאר המשתנים ונקבל את הפתרון הכללי: $\left\{\begin{pmatrix}t\\-2t\\t\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$. לכן: $N(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נמצא את $C(B)$. נדרג את המטריצה ונקבל: $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&3&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. איברי הציר נמצאים בשתי העמודות הראשונות ולכן: $C(B)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$ (שימו לב שיש לחזור לעמודות המקוריות!).

כעת נמצא את החיתוך. על מנת שאיבר יהיה בחיתוך הוא צריך להיות צ"ל של בסיסי שני המרחבים. לכן עלינו לפתור את המשוואה הבא: $\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$. קל לראות שמקבלים $\alpha=\beta=\gamma=0$ ולכן החיתוך הוא טריויאלי.

לסיכום: $\dim\left(C(B)\bigcap N(A)\right)=0$.

שאלה 3

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-2

א. בדקו ש- $B=\{1+x+x^2,\ 1+2x+2x^2+,\ 1+2x+3x^2\}$ הוא בסיס ל- V.

ב. מצאו מטריצת מעבר בין הבסיס הסטנדרטי ל-B.

ג. באמצעות סעיף ב' מצאו את וקטור הקואורדינאטות של וקטור כללי ב-V:
$f(x)=bx^2+cx+d$ לפי איברי הבסיס B.

פתרון:

א. נניח את וקטורי הקואורדינאטות של וקטורי B לפי הבסיס הסטנדרטי במטריצה ונבדוק ת"ל:

$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\to\dots\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ כלומר B קבוצה המורכבת מ-3 וקטורים בת"ל במרחב ממימד 3 ולכן מהווה בסיס למרחב.

ב. נסמן $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ ולכן:

$$[I]_B^S=\left([I]_S^B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}|&|&|\\ [v_1]_S&[v_2]_S&[v_3]_S\\ |&|&|\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

ג. ע"פ המשפט: $[I]_B^S[v]_S=[v]_B$ נחשב ונמצא:

$[f(x)]_B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\c\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2d-c\\-d+2c-b\\-c+b\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 4</u>

תהי מערכת המשוואות הבאה , מוגדרת מעל השדה $\mathbb{Z}_5$ (כלומר כל הפעולות הינן מודולו 5)

$$\begin{cases} x+y+4z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$$, כאשר a פרמטר.

עבור אלו ערכי פרמטר a , אם בכלל :

1. לא יהיו פתרונות 2.יהיה פתרון אחד 3. יהיו יותר מפיתרון אחד ?

במקרה של **<u>יותר מפיתרון אחד</u>** , תנו הצגה כללית של צורת הפיתרון.

<u>פתרון:</u>

נפתור את מערכת המשוואות בעזרת דירוג , כשנשים לב שהפעולות האלמנטאריות אותן נעשה אינן משנות את קבוצת הפיתרון – למשל , לא נכפול משוואה בסקלר שיכול להיות אפס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (1-a)R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4+(-a^2-a+2) & 2-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2(a-2))^2 & 2-a \end{array}\right)$$

כאשר בשדה $\mathbb{Z}_5$ מעליו אנו עובדים קיים : $(1-a)(a+2) = a+2-a^2-2a = -a^2-a+2$

ומכאן: $4+(-a^2-a+2) = 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2 = (2a-4)^2 = (2(a-2))^2$

ומכאן נסיק שעבור $a \neq 2$ נקבל צורה מדורגת למטריצה , ללא שורת אפסים – ולכן פיתרון אחד !

כלומר עבור כל אחד מ: $a = 0,1,3,4$, נקבל פיתרון אחד למערכת . אין מקרה בו אין פתרונות !

עבור $a = 2$ נקבל את המטריצה הבאה : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ עם פיתרון כללי מהצורה :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$