

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

ט' שבט תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. נגדיר $f(z) = e^z \sin z \cos z$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב- \mathbb{C} וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

2. נניח ש- $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z| < R$. הוכיחו שגם הפונקציה $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית שם.
הדרכה: אם $f = u + iv$ אז $\bar{f}(\bar{z}) = u(x, -y) - iv(x, -y)$. תחילה הסבירו שוויון זה ואז הסתמכו עליו.

3. חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 4x}{(x^2 + 9)^2} dx$

4. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה מורכבת משלושה קטעים ישרים:
מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- 1 ומ- 1 ל- $1+i$.

5. מצאו טור לורן סביב 0 לפונקציה $f(z) = z^3 e^{1/z^2} - \frac{\sin 2z}{z}$ וחשבו $\operatorname{Res}(f, 0)$.

6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ בעיגול היחידה $|z| < 1$?
הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

כ"ג אדר תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. נגדיר $f(z) = z^4 - 2 + 2i$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב- \mathbb{C} וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

2. נניח ש- $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z| < R$, ונניח שלכל z בעיגול זה $\text{Im } f(z) = 0$ הוכיחו כי $f(z)$ היא פונקציה קבועה.

3. חשבו בעזרת משפט השארית: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} dx$

4. חשבו $\int_{|z|=2} \frac{\bar{z} + z^2}{z+3} dz$ (כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון)

5. מצאו טור לורן לפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ בתחום $1 < |z| < 2$.

6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $3z^6 - e^z$ בעיגול היחידה $|z| < 1$? הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!

קורס: 88-231-05
מרצה: ש. הרוביץ
י"ג אב תשס"ח

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים וחצי.

1. מצאו את כל האפסים של $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + i$ ב- \mathbb{C} .
הזרקה: $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 = (z+1)^4$.

2. נניח ש- $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הרמונית וגם u^2 הרמונית. הוכיחו ש- u פונקציה קבועה.

3. חשבו: $\int_{\gamma} (z + \frac{1}{z}) dz$ כאשר γ היא המסילה הנתונה ע"י.
 $z(t) = \sin 2t + i(4 \cos t + 2t): 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

4. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

5. מצאו את החלק העיקרי של טור לורן של הפונקציה $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 9)^2}$ סביב הנקודה
 $z_0 = 3i$.

6. הוכיחו שלא קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית בסביבה S של 0 כך שלכל $z \in S$
 $f^2(z) = \sin z$.

בהצלחה!

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות. כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. משך הבחינה שעתיים וחצי.

1. מצאו את כל האפסים של $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + i$ ב- \mathbb{C} .
הדרכה: $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 = (z+1)^4$.
2. נניח ש- $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הרמונית וגם u^2 הרמונית. הוכיחו ש- u פונקציה קבועה.
הדרכה: לגזור ע"י כלל השרשרת.
3. חשבו: $\int_{\gamma} (z + \frac{1}{z}) dz$ כאשר γ היא המסילה הנתונה ע"י.
 $z(t) = \sin 2t + i(4 \cos t + 2t): 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
4. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ והצדיקו את תשובתכם.
5. מצאו את החלק העיקרי של טור לורן של הפונקציה $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 9)^2}$ סביב הנקודה $z_0 = 3i$.
6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $\frac{4z^3 - e^z}{z+2} \sin z$ בתוך עיגול היחידה $\{z: |z| < 1\}$ והצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!

קורס: 88-231-05
מרצה: ש. הורוביץ
כ"ד אלול תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים וחצי.

1. מצאו את כל הערכים ב- \mathbb{C} של $\left[\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} \right]^{1/3}$.

2. נניח ש- $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה שלימה, ונניח שבכל מקום $u_x = u_y$. הוכיחו שבהכרח f פונקציה ליניארית מהצורה $f(z) = az + b$.

3. חשבו: $\int_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2} dz$. המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

4. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש- $f(z)$ פונקציה שלימה ולא קבועה. הוכיחו כי הטווח $f(\mathbb{C}) = \{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$ צפוף ב- \mathbb{C} .

6. תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה הסגור $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ונניח שעבור $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $f(e^{i\theta}) \neq 0$ וגם $-\pi/2 \leq \arg f(e^{i\theta}) \leq \pi$. הוכיחו כי $f(z) \neq 0$ לכל z כך ש- $|z| < 1$.

בהצלחה!

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

כ"ג שבט תש"ע

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 22 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. מצאו את כל המספרים $z \in \mathbb{C}$ כך ש- $\frac{z^3+1}{z^3-1} = -i$.

2. נגדיר $f(z) = f(x+iy) = x^2(1+i) + y^2(1-i)$.
א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?
ב. באילו נקודות $f(z)$ אנליטית? (ז.א. שיש להן סביבה שלימה שבה f גזירה.)

3. חשבו: $\int_{\gamma} (z+\bar{z})(z-\bar{z}) dz$ כאשר γ משולש בעל קדקדים ב- $0, 1, i$ מתואר
נגד כיוון השעון.

4. נגדיר $g(z) = \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}$.
א. מצאו את טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 2$.
ב. קבעו באיזה תחום פתוח (בלי שפה) הטור שבסעיף א' מתכנס.
ג. חשבו $\oint_{|z|=3} g(z) dz$.

5. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 3x}{(x^2+4x+8)} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

ט' אייר תש"ע

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 22 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. הוכיחו שאם $|z|=1$ אז הביטוי $\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}$ ממשי.

2. נניח שהפונקציות $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בכל \mathbb{R}^2 ומקיימות שם את משוואות קושי-רימן. הוכיחו שגם הפונקציות u_x ו- v_x מקיימות את משוואות קושי-רימן.

3. חשבו את $\int_{\gamma} \cos z dz$ כאשר γ היא קשת של האליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ מהנקודה $(2, 0)$ עד הנקודה $(0, 3)$.

4. נגדיר $g(z) = \frac{z^3}{e^{1/z^2}}$.

א. מצאו את טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 0$.

ב. חשבו $\oint_{|z|=3} g(z) dz$.

5. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!

קורס: 88-231-01,05,08
מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ
אב תש"ע

מבחן מיוחד בפונקציות מרוכבות

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. מצאו את כל הערכים ב- \mathbb{C} של $\left[\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} \right]^{1/3}$.

2. נגדיר $f(z) = f(x+iy) = x^2(1+i) + y^2(1-i)$.
א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

ב. באילו נקודות $f(z)$ אנליטית? (ז.א. שיש להן סביבה שלימה שבה f גזירה.)

3. $\int_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2} dz$. המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

4. נגדיר $g(z) = \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}$ ו- $z_0 = 2$.

א. מצאו את טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 2$.

ב. קבעו באיזה תחום פתוח (בלי שפה) הטור שבסעיף א' מתכנס.

ג. חשבו $\oint_{|z|=3} g(z) dz$.

5. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $\frac{4z^3 - e^z}{z+2} \sin z$ בתוך עיגול היחידה

$\{z: |z| < 1\}$ והצדיקו את תשובתכם

קורס: 88-231-01,05,08
מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ
כ"ז אלול תש"ע

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. נניח ש- $z \in \mathbb{C}$ ונניח ש- $z^2 + \frac{1}{\bar{z}^2} \in \mathbb{R}$. הוכיחו שבהכרח $z \in \mathbb{R}$ או $iz \in \mathbb{R}$.

2. נניח ש- $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה של z_0 ונניח ש- $f(z_0) \neq 0$ נגדיר
 $g(z) = \log|f(z)|$. הוכיחו ש- $g(z)$ הרמונית באיזו סביבה של z_0 .

3. חשבו $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] dz$ כאשר γ היא המסילה המוגדרת ע"י
$$z(t) = \begin{cases} e^{it} & : -\pi \leq t \leq 0 \\ 1-2t & : 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

4. חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+16)^2} dx$. הצדיקו את תשובתכם.

5. א. חשבו טור לורן שמתכנס ב- \mathbb{C} פרט לנקודה 0 עבור הפונקציה
 $f(z) = (2z^5 - 4z^2) \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$
ב. חשבו את $\text{Res}(f, 0)$.

6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $9z^5 e^z - 2z^3 + 1$ בעיגול $B(0,1)$. הצדיקו את תשובתכם.

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד 'א'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות. כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. יש חובה לנמק כל תשובה!
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה $z^6 - 9iz^3 = 8$. כתבו את הפתרונות בסגנון $a + bi$.

2. נניח ש- $f(z)$ פונקציה שלימה כך שלכל $z \in \mathbb{C}$ $|\sin f(z)| > 1$. הוכיחו ש- $f(z)$ קבועה.

3. חשבו $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3 - 8}{\bar{z} - 2} dz$ כאשר γ היא המסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- i עד 0 , ואח"כ הקטע הישר מ- 0 עד 1 .

4. חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx$. הצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש- $f(z)$ אנליטית ולא קבועה בסביבה מנוקבת של 0 .
א. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ סביב 0 מכיל רק חזקות $n \geq 0$ וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ סביב 0 מכיל רק חזקות $n \leq 0$? נמקו את תשובתכם.

ב. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ סביב 0 מכיל רק חזקות $n \geq 0$ וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ סביב 0 מכיל ∞ חזקות שליליות? נמקו.

6. א. נגדיר מעגל $M = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 3\}$. הוכיחו שהנקודה הקרובה ביותר ל-0 במעגל M היא הנקודה $z = -2$

ב. נגדיר $f(z) = z^4 + z^2 - 2z + 1$. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל- $f(z)$ בתוך

העיגול $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 3\}$. הצדיקו את תשובתכם.

קורס: 88-231-01,05,07
מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ
י"ב אלול תשע"א

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. יש חובה לנמק כל תשובה.
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. לכל $z \in \mathbb{C}$ נגדיר $f(z) = z^2 e^z - 4z^3 e^{z^2}$. הוכיחו שאם z_0 הוא מספר מרוכב כך ש-
 $f(z_0) = 5$ אז $f(\bar{z}_0) = 5$

2. א. הגדירו ואפיינו "אפס מסדר k " של פונקציה אנליטית.
ב. נניח ש- $f(z)$ פונקציה שלימה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $|f(\frac{1}{n})| < \frac{1}{n^n}$. הוכיחו ש- $f(z)$ קבועה.

3. חשבו $\int_{|z|=1} e^{1/z} \sin(\frac{1}{z}) dz$ כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

4. חשבו: $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2 + 4)^2} dx$. הצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש- $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ מקיימת את משוואות קושי-רימן $u_x = v_y; u_y = -v_x$ בתחום $D \subset \mathbb{C}$. הוכיחו כי הפונקציה $h(x, y) = u^3(x, y) - 3u(x, y)v^2(x, y)$ הרמונית ב- D .

6. נגדיר $f(z) = z^4 - 4z^3 + 8z - 2$. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל- $f(z)$ בתוך העיגול $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$. הצדיקו את תשובתכם.

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

ט' שבט תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. נגדיר $f(z) = e^z \sin z \cos z$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב- \mathbb{C} וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

2. נניח ש- $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z| < R$. הוכיחו שגם הפונקציה $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית שם.
הדרכה: אם $f = u + iv$ אז $\bar{f}(\bar{z}) = u(x, -y) - iv(x, -y)$. תחילה הסבירו שוויון זה ואז הסתמכו עליו.

3. חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 4x}{(x^2 + 9)^2} dx$

4. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה מורכבת משלושה קטעים ישרים:
מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- 1 ומ- 1 ל- $1+i$.

5. מצאו טור לורן סביב 0 לפונקציה $f(z) = z^3 e^{1/z^2} - \frac{\sin 2z}{z}$ וחשבו $\operatorname{Res}(f, 0)$.

6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ בעיגול היחידה $|z| < 1$?
הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

כ"ג אדר תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. נגדיר $f(z) = z^4 - 2 + 2i$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב- \mathbb{C} וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

2. נניח ש- $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z| < R$, ונניח שלכל z בעיגול זה $\text{Im} f(z) = 0$ הוכיחו כי $f(z)$ היא פונקציה קבועה.

3. חשבו בעזרת משפט השארית: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} dx$

4. חשבו $\int_{|z|=2} \frac{\bar{z} + z^2}{z+3} dz$ (כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון)

5. מצאו טור לורן לפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ בתחום $1 < |z| < 2$.

6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $3z^6 - e^z$ בעיגול היחידה $|z| < 1$? הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!