פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 4

1.

א. $\sin(i) = i\sinh(1) = i\dfrac{e - 1/e}{2}$

ב. $\cos(-i) = \cosh(1) = \dfrac{e + 1/e}{2}$

ג. $\tan(1+i) = \dfrac{\sin(2)}{\cos(2)+\cosh(2)} + i\dfrac{\sinh(2)}{\cos(2)+\cosh(2)}$

2.

א. $(1+i)^{2i} = e^{2i\log(1+i)} = e^{2i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)} = e^{i\ln 2}e^{-\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)}$

ב. $(-i)^{-i} = e^{-i\left(\ln(1)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$

ג.

$$\mathrm{Im}\left[(1-i)^{1+i}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right]}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i\left[\ln\sqrt{2}+-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]}\right] = e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\sin\left[\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$$

3. ניקח $z = 2\pi i, w = i$, ואז $\left(e^{z}\right)^{w} = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw}$

4. $w = \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+iz}{1-iz} = \arctan z$

5. $\sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

6. $\sinh(z) = \dfrac{1}{i}\sin(iz)$ והאחרון מתאפס או"א $iz = \pi k$. כלומר $z = \pi k i$ עבור $k \in \mathbb{Z}$.

7. i