

# המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

אוניברסיטת בר-אילן מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 מספר הקורס: 8821101  
המרצה: מיכאל מגרל המתרגל: תומר באואר  
מועד ב', תשע"ו 27.03.16  
משך המבחן: 3 שעות חומר עזר: אין

סמנו באופן ברור בראש כל עמוד באיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.

1. בשאלה זו ענו על **ארבעה** משש הסעיפים.

א. פתרו את המשוואה  $30! + 4x \equiv 5^{154} \pmod{31}$ .

ב. נסחו והוכיחו את משפט Lagrange.

ג. הוכיחו שכל חבורה דיהדרלית  $D_n$  היא פתירה ומצאו סדרת הרכב של  $D_{82}$ .

ד. הוכיחו שחבורת המטריצות  $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$

היא מכפלה ישרה למחצה של שתי חבורות אבליות איזומורפיות. מצאו אינסוף תת-חבורות לא נורמליות של  $G$  איזומורפיות זו לזו.

ה. כמה הומומורפיזמים קיימים  $C_{49} \rightarrow S_{10}$ ? האם קיים מונומורפיזם?

ו. הוכיחו: חבורות  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  לא נוצרות סופית, והן לא איזומורפיות זו לזו.

2. א. תארו בצורה מפורשת מונומורפיזם  $\langle cis 8^\circ \rangle \rightarrow S_{15}$ .

ב. כמה חבורות אבליות קיימות בגודל 300?

כמה מהן כל תת-חבורות סילו ציקליות?

3. א. (משפט על חבורות- $p$ ) נניח  $G$  חבורת- $p$ . הוכיחו שקיימת תת-חבורה

נורמלית  $H$  עם אינדקס  $[G:H] = p$ . הסיקו ש  $G$  חבורה פתירה והציגו סדרת הרכב שלה.

ב. נתונה פעולה  $G \times X \rightarrow X$  כאשר  $|G| = 49, |X| = 23$ . הוכיחו שקיימת

לפעולה זו לפחות נקודת שבת אחת.

4. א. מצאו את מספר התמורות הצמודות לתמורה  $a = (7254)(536)(18) \in S_8$ .

כמה אברים מ  $S_8$  מתחלפים עם  $a$ ?

ב. בחבורה  $G$  יש 65 אברים. הוכיחו או הפריכו:

•  $G$  לא פשוטה.

• הסדר של  $Aut(G)$  הוא בהכרח 48.

\* (שאלת בונוס, 5 נקודות)

מצאו אפימורפיזם מפורש  $\mathbb{R}^* \rightarrow T$

(כאשר  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $T := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ .)

**בהצלחה!**