אינפי 4 - תרגול 8

31 באוגוסט 2011

משפט

f פונק' ב-$\mathbb{R}^3$, F שדה וקטורי, אזי:

1.
$$df = W_{\nabla f}$$

2.
$$dW_f = \phi_{\nabla\times F}$$

3.
$$d\phi_F = \rho_{\nabla\cdot F}$$

דוגמה

יש לחשב את הנגזרת החיצונית של 1-form ב-$\mathbb{R}^3$:

$$xydx + zdy + yzdz$$

כלומר מחשבים את W_F כאשר $F = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ yz \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
d\left(xydx + zdy + yzdz\right) &= d\left(xy\right)\wedge dx + d\left(z\right)\wedge dy + d\left(yz\right)\wedge dz \\
&= \left(D_1xydx + D_2xydy + D_3xydz\right)\wedge dx \\
&+ \left(D_1zdx + D_2zdy + D_3zdz\right)\wedge dy \\
&+ \left(D_1yzdx + D_2yzdy + D_3yzdz\right)\wedge dz \\
&= \left(ydx + xdy + 0dz\right)\wedge dx \\
&+ \left(0dx + 0dy + dz\right)\wedge dy \\
&+ \left(0dx + zdy + ydz\right)\wedge dz \\
&= xdy\wedge dx + dz\wedge dy + zdy\wedge dz \\
&= -xdx\wedge dy - dy\wedge dz + zdy\wedge dz \\
&= -xdx\wedge dy + \left(z-1\right)dy\wedge dz
\end{aligned}$$

כאשר אנו מסמנים

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

כיוון שכל 2-form אפשר לכתוב באופן הבא:

$$\phi_G = G_1dy\wedge dz - G_2dx\wedge dz + G_3dx\wedge dy$$

אם יוצא ש $G=\begin{pmatrix} z-1\\ 0\\ -x\end{pmatrix}$ אז נקבל את מה שאמורים לקבל את המשפט.
רוצים לבדוק:

$$dW_f=\phi_{\nabla\times F}$$

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & z & yz\end{vmatrix}=\begin{pmatrix} z-1\\ 0\\ -x\end{pmatrix}$$

ולכן קיבלנו את אותו וקטור בדיק משני צדדי המשפט. (חישבנו את מה שצריך בשתי דרכים).

תרגיל

נעשה אינטגרציה של 2-form הבא:

$$\varphi=x\left(dy\wedge dz\right)-y^{2}\left(dz\wedge dz\right)+z^{3}\left(dz\wedge dy\right)$$

מעל המעטפת של קוביה C_a הנתונה ע"י:

$$0\leq x,\,y,\,z\leq a>0$$

פתרון

$$\begin{aligned} d\varphi & = dx\wedge dy\wedge dz-2ydy\wedge dx\wedge dz+3z^{2}dz\wedge dz\wedge ey\\ & = \left(1+2y+3z^{2}\right)dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial C_{a}}\varphi & = \int_{C_{a}}\left(1+2y+3z^{2}\right)dx\wedge dy\wedge dz\\ & = \int_{0}^{a}\int_{0}^{a}\int_{0}^{a}1+2y+3z^{2}dxdydz=a^{2}\left(a+a^{2}+a^{3}\right)\end{aligned}$$

תרגיל

יהי S איחוד של פיאות של קוביה C הנתונה על ידי

$$-1\leq x,\,y,\,z\leq1$$

נחשב

$$\int_{S}\phi_{F}$$

כאשר

$$F=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

פתרון

$$\begin{aligned} d\phi_{F} & = \mathrm{div}F\,dx\wedge dy\wedge dz=3dx\wedge dy\wedge dz\\ \int_{\partial C}\phi_{F} & = 3\int_{C}dxdydz=3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}dxdydz=24\end{aligned}$$

דוגמה

נחשב את האינטגרל:

$$\int_{\partial D} (xdy - ydx)$$

כאשר D הוא הריבוע:

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;|\; -1 \le x,\, y \le 1\right\}$$

פתרון

נשתמש במשפט סטוק ונקבל:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} xdy - ydx &= \int_D d\,(xdy - ydx) \\ &= \int_D 2dx \wedge dy \\ &= 2\int_D dxdy \\ &= 2 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dxdy \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8\end{aligned}$$

נניח כעת שS הוא איחוד הפאות פרט לפאה העליה.
נעשה פרמטריזציה לפאה העליונה:

$$S_1 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\int_{S_1} \phi_F = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{vmatrix} s & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} dsdt = 4$$

משפט סטוקס

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \hat{n} ds$$

כאשר

$$\overrightarrow{F} \in C^1$$

S משטח חלק למקוטעין, ששפתו C היא עקום חלק למקוטעין.
$\hat{n}$ - כיוון נורמל של משטח, מוגדר לפי כלל יד ימין.

סטוקס וגרין

נתבונן בS, הוא חלק חסום של מישור xy חסום.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= P\hat{i} + Q\hat{j} + 0\hat{k} \\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n}ds \\ &= \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\hat{k}ds \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}\cdot\hat{k}ds \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds\end{aligned}$$

משפט גאוס

$$\oiint_S \vec{F}ds = \iiint_V \vec{\nabla}\times\vec{F}dxdydz$$

כאשר $F\in C^1$, V תחום תלת מימדי הכלוא בתוך S.
הכיוון של ds הוא כלפי חוץ.

תרגיל

לכל $b>0$ נתון משטח:

$$S_b=\left\{(x,\,y,\,z)\ \mid \begin{array}{c} x^2+y^2+\frac{z^2}{b}=1 \\ z\geq 0\end{array}\right\}$$

כמו כן

$$F=y^3\hat{i}+z^2\hat{k}$$

ונתון

$$G=\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

נסמן

$$\phi(b)=\iint_{S_b}\vec{G}\cdot\hat{n}ds$$

חשב

$$\phi(1)$$

פתרון

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \vec{\nabla}\times\vec{F} \\ &= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & 0 & z^2\end{vmatrix} = -3y^2k\end{aligned}$$

נפתור בעזרת משפט גאוס:
נסגור את תחום S_b על ידי עיגול היחיזה D במישור xy. כיוון הנורמל הוא $-\hat{k}$.

$$\iint_S G\hat{n}ds \quad = \quad \iint_D \vec{G}\hat{n} = \iiint_V \mathrm{div}Gdxdydz = 0$$

(הדקות האחרונות חסרות)