מבוא לאנליזה מתקדמת מבחן
מועד א'

מרצה: תמר בר־און.
משך הבחינה: 3 שעות
הוראות: יש לענות על כל השאלות. בכל שאלה יש להראות דרך, ותשובה סופית. תשובה סופית בלי דרך לא תקבל ניקוד!
משקל שאלות 1־4: 23 נקודות כל אחת.
משקל שאלה 5: 18 נקודות.
כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. פתרו את המד"ר הבא (מצאו פתרון כללי):

$$\cos(x+y)e^{4y} - 1 + (\cos(x+y)e^{4y} + 4e^{4y}\sin(x+y) + 2y)y' = 0$$

פתרון:

נכפיל בdx ונקבל: $(\cos(x+y)e^{4y} - 1)dx + (\cos(x+y)e^{4y} + 4e^{4y}\sin(x+y) + 2y)dy = 0$

נסמן: $X = \cos(x+y)e^{4y} - 1$

$Y = (\cos(x+y)e^{4y} + 4e^{4y}\sin(x+y) + 2y)$

ניתן לראות ש$X_y = Y_x$ ולכן זאת מד"ר מדוייקת.

נרצה למצוא את $F(x,y)$.

$F(x,y) = \int X dx + c(y)$.

$\int X dx = \sin(x+y)e^{4y} - x = Q(x,y)$

$Q_y + c'(y) = Y$

$\cos(x+y)e^{4y} + 4\sin(x+y)e^{4y} + c'(y) = (\cos(x+y)e^{4y} + 4e^{4y}\sin(x+y) + 2y)$

$c'(y) = 2y$

$c(y) = y^2$

לכן $F(x,y) = \sin(x+y)e^{4y} - x + y^2$

והתשובה היא: $\sin(x+y)e^{4y} - x + y^2 = Constant$.

2. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{5xy^2}$$

פתרון:

זאת משוואה הומוגנית.

נציב $z = \frac{y}{x}$.

אז $y = zx$

ולכן $y' = z'x + z$

נציב במשוואה:

$$z'x + z = \frac{1 + z^3}{5z^2}$$

$$z'x = \frac{1 + z^3}{5z^2} - z = \frac{1 - 4z^3}{5z^2}$$

$$\frac{5z^2}{1 - 4z^3} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{5z^2}{1 - 4z^3} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{5}{12} \int \frac{-12z^2}{1 - 4z^3} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{5}{12} \ln(1 - 4z^3) = \ln(cx)$$

$$(1 - 4z^3)^{-\frac{5}{12}} = cx$$

נציב בחזרה $z = \frac{y}{x}$ ונקבל פונקציה סתומה שמקשרת בין y ל x: $(1-4(\frac{y}{x})^3)^{-\frac{5}{12}} = cx$.

3. מצאו גורם אינטגרציה למד"ר הבאה:

$$(x^2-y)dx+(x^3y-x-3xy^2)dy=0$$

פתרון:

$X=x^2-y, Y=x^3y-x-3xy^2$

$X_y=-1, Y_x=3x^2y-1-3y^2$

$\frac{X_y-Y_x}{X}=-3y$ תלוי בy בלבד.

לכן יש גורם אינטגרציה שתלוי בy.

ניתן למצוא אותו ע"י פתירת המשוואה הבאה:

$$\mu'-3y\mu=0$$

לכן $\mu=e^{\frac{3y^2}{2}}$

4. מצאו את הפתרון הכללי למד"ר הבאה:

$$y''+4y=4\cos 2x$$

פתרון:

ראשית, נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית: $y''+4y=0$.

המשוואה האופיינית היא $\lambda^2+4=0$. יש לה שני שורשים מרוכבים: $\lambda_1=2i, \lambda_2=-2i$. לכן הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא: $y_0=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

כעת, נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

מכיוון ש$\cos 2x$ הוא כבר פתרון של ההומוגנית, ננחש פתרון מהצורה:

$$y_p=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$$

נגזור: $y_p'=A\cos 2x-2Ax\sin 2x+B\sin 2x+2Bx\cos 2x$

$y_p''=-2A\sin 2x-2A\sin 2x-4Ax\cos 2x+2B\cos 2x+2B\cos 2x-4Bx\sin 2x$

נציב:

$$-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x+4B\cos 2x-4Bx\sin 2x+4Ax\cos 2x+4Bx\sin 2x=4\cos 2x$$

לכן $B=1, A=0$

כלומר, $y_p=x\sin 2x$

והפתרון הכללי הוא: $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x\sin 2x$.

5. הוכיחו שלא קיימת מד"ר לינארית מסדר ראשון, עם מקדמים רציפים בכל $\mathbb{R}$, ששתי הפונקציות הבאות הן פתרונות שלה:

$$y_1(x) = x^2 - 7x - 2$$

$$y_2(x) = 3x^2 + 1$$

פתרון:

נבדוק האם הפונקציות נחתכות.

$$3x^2 + 1 = x^2 - 7x - 2$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

יש למשוואה שני פתרונות: $-3, \frac{1}{2}$. כלומר, $y_1(-3) = y_2(-3) = 28$.

לפי משפט הקיום והיחדות, יש רק פתרון אחד שמקיים את תנאי ההתחלה $y(-3) = 28$. לכן לא ייתכן ששתי הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר, כי שתיהן מקיימות את תנאי ההתחלה.