תרגול 8 - התפלגות נורמלית רב מימדית - תשע"ט

23 באפריל 2019

- **הגדרה - משתנה מקרי n מימדי**

  - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $X_k:\Omega\to\mathbb{R}$ $(k\in\{1,...,n\})$ פונקציות ממשיות על Ω. נגדיר $\forall_{\omega\in\Omega}\overrightarrow{X}(\omega)=(X_1,...,X_n)(\omega)=(X_1(\omega),...,X_n(\omega))$ ונקבל פונקציה וקטורית $\overrightarrow{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$.
  - כאשר $\overrightarrow{X}:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ מדידה. אזי $\overrightarrow{X}$ נקרא מ"מ n מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ או "וקטור מקרי n מימדי" על מרחב ההסתברות.
  - $\overrightarrow{X}:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ הוא משתנה מקרי n מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אם ורק אם $\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}:\overrightarrow{X}^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega\,|\,\overrightarrow{X}(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$.
  - **טענה**

    * $(X_1,...,X_n):(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ הוא מ"מ n מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אם ורק אם $\forall_{k\in\{1,2,...,n\}}X_k:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ הוא משתנה מקרי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

  - **טענה**

    * נזכר כי $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\{(-\infty,a]\,|\,a\in\mathbb{R}^n\})$ ומכיוון שבכדי להוכיח כי פונקציה היא מדידה, מספיק להראות תנאי מתאים על היוצרים. נביט על הטענה הבאה:

      · $\overrightarrow{X}:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ משתנה מקרי n מימדי אם ורק אם $\forall_{\overrightarrow{a}=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n}\{\omega\in\Omega\,|\,\overrightarrow{X}(\omega)\le\overrightarrow{a}\}=\{\omega\in\Omega\,|\,X_1(\omega)\le a_1,...,X_n(\omega)\le a_n\}\in\mathcal{F}$

- **דוגמא**

נגדיר מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ באופן הבא:

* $\Omega = \{(x,y)\,:\,x^2+y^2 \leq 1\}$ (עיגול היחידה)
* $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \cap 2^{\Omega}$. ($\mathcal{F}$ σ־אלגברה. הוכח!)
* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^2$ המוגדר $\forall_{A\in\mathcal{F}}\mathbb{P}(A) = \frac{S(A)}{\pi}$ ו־ $S(A) = \#Area\,Of\,A$ ($\mathbb{P}$ מידת הסתברות על $\mathcal{F}$. הוכח!)
* לכל $(x,y) \in \Omega$ נגדיר את המשתנים המקריים $X, Y\,:\,\Omega \to \mathbb{R}$ באופן הבא: $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$.
* אזי $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ משתנה מקרי דו מימדי כי

.

$$\forall_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\{(x,y)\in\Omega\,|\,X((x,y)) \leq a,\, Y((x,y)) \leq b\} =$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\leq a,\, y\leq b\}\cap\Omega = (-\infty,a]\times(-\infty,b]\cap\Omega\in\mathcal{F}$$

- **משתנה מקרי נורמלי n מימדי**

- **הגדרה (1־מימדי)**

* וקטור המשתנים המקריים X מתפלג נורמלית אם:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)\cdot(\sigma^2)^{-1}\cdot(t-\mu)}$$

כאשר $\mathbb{E}[X] = \mu$ ו־ $var[X] = \sigma^2$

- **הגדרה (2־מימדי)**

* וקטור המשתנים המקריים $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2)$ מתפלג נורמלית אם:

$$f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t}) = f_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}}\cdot exp(-\frac{1}{2}\cdot Q)$$

$$Q = \begin{bmatrix} t_1 - \mathbb{E}[X_1] & t_2 - \mathbb{E}[X_2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} t_1 - \mathbb{E}[X_1] \\ t_2 - \mathbb{E}[X_2] \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

– **הגדרה (n מימדי)**

* וקטור המשתנים המקריים $\overrightarrow{X} = (X_1, ..., X_n)$ מתפלג נורמלית אם פונקצית הצפיפות:

$$f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t}) = f_{\overrightarrow{X}}((t_1, ..., t_n)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} \cdot exp(-\frac{1}{2}(\overrightarrow{t} - \overrightarrow{\mu})^T(\Sigma^{-1})(\overrightarrow{t} - \overrightarrow{\mu}))$$

כאשר

$$\overrightarrow{\mu} = (\mathbb{E}[X_1], ..., \mathbb{E}[X_n])$$

$$(\Sigma)_{i,j\in\{1,2,...,n\}} = Cov(X_i, X_j)$$

(Σ מטריצה סימטרית וחיובית לחלוטין מדרגה n, כלומר $det(\Sigma) \neq 0$.
אם $det(\Sigma) = 0$ אין להתפלגות הנורמלית הרב מימדית פונקציית צפיפות).

* וקטור $\overrightarrow{X} = (X_1, ..., X_n)$ מתפלג נורמלית (רב מימדי) אם ורק אם כל צירוף לינארי של איבריו מתפלג נורמלית.

– **תרגיל**

* יהיו $\{X_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $\forall_i X_i \sim N(0,1)$.
  · האם הוקטור המקרי $\overrightarrow{X} = (X_1, ..., X_n)$ מתפלג נורמלית?
  · האם ל־ $\overrightarrow{X}$ יש פונקציית צפיפות? אם כן, חשבו את פונקציית הצפיפות של $\overrightarrow{X}$.
* **פתרון**
  · כדי לקבוע אם $\overrightarrow{X}$ מתפלג נורמלית מספיק לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של $\overrightarrow{X}$ (או את הפונקציה האופיינית), מכיוון שזאת קובעת באופן יחיד את ההתפלגות :

$$\mathbb{E}[e^{\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{X}}] = \mathbb{E}[e^{\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{X}}] \overset{independence}{=} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[e^{t_i X_i}] = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{2}\cdot t_i^2} = e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot t_i^2} = e^{\frac{1}{2}||\overrightarrow{t}||^2}$$

· $\Sigma = I_n$ מטריצה סימטרית. חיובית לחלוטין (מטריצה A היא חיובית לחלוטין אם כל המינורים הראשיים שלה חיוביים) ו־ $det(\Sigma) = 1 \neq 0$.
לכן, קיימת ל־$\overrightarrow{X}$ פונקציית צפיפות. ועל פי הנוסחה מקיימת:

$$f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} \cdot exp(-\frac{1}{2}(\overrightarrow{t} - \overrightarrow{\mu})^T (\Sigma^{-1})(\overrightarrow{t} - \overrightarrow{\mu}))$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot exp(-\frac{1}{2}(\overrightarrow{t})^T (I_n)(\overrightarrow{t}))$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot exp(-\frac{1}{2}||\overrightarrow{t}||^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}||\overrightarrow{t}||^2}$$

- **<u>תרגיל</u>**

* אם $\overrightarrow{X} \sim N(0, I_n)$ (נורמלי סטנדרטי) אזי לכל מטריצה אורתוגונלית A (מטריצה ריבועית ממשית המקיימת $AA^T = A^T A = I_n$) עבורה $\overrightarrow{W} = A\overrightarrow{X}$ מתקיים $\overrightarrow{W} \sim N(0, I_n)$.
* **פתרון**

$$\int f_W(\overrightarrow{t}) d\overrightarrow{t} = \int f_W(\overrightarrow{t(s)}) \cdot |J(s)| d\overrightarrow{s}$$

ביצענו החלפת משתנים באופן הבא־ יהי A מטריצה אורתוגונלית. אזי $\overrightarrow{s} = A\overrightarrow{t}$. מטריצה אורתוגונלית היא הפיכה ולכן, מתקיים $A^T\overrightarrow{s} = A^{-1}\overrightarrow{s} = \overrightarrow{t}$כלומר, $\overrightarrow{t}(s) = A^T\overrightarrow{s}$. ואז $J(s) = \frac{d\overrightarrow{t}}{d\overrightarrow{s}}(s) = A^T$.. מתכונת מטריצות אורתוגונליות מתקיים $|J(s)| = |\frac{d\overrightarrow{t}}{d\overrightarrow{s}}(s)| = |A^T| \in \{1, -1\}$. לכן, עד כדי סימן:

$$\int f_W(\overrightarrow{t}) d\overrightarrow{t} = \int f_X(\overrightarrow{t(s)}) \cdot |J(s)| d\overrightarrow{s} = \int f_X(\overrightarrow{t(s)}) d\overrightarrow{s}$$

זאת, כי מכיוון ש־ $\overrightarrow{W} = A\overrightarrow{X}$ואז

$$\mathbb{E}[e^{\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{W}}] = \mathbb{E}[e^{(A^T\overrightarrow{s}) \cdot \overrightarrow{X}}] = \mathbb{E}[e^{\overrightarrow{t}(s) \cdot \overrightarrow{X}}]$$

הקובע ביחידות את פונקציית ההתפלגות המצטברת, ובהתאמה את פונקציית הצפיפות (ע"י גזירה). לכן: .

$$\int f_X(\overrightarrow{t(s)}) d\overrightarrow{s} = \int e^{-\frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{t(s)}||^2} d\overrightarrow{s} = \int e^{-\frac{1}{2} \cdot ||A^T\overrightarrow{s}||^2} d\overrightarrow{s} = \int e^{-\frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{s}||^2} d\overrightarrow{s}$$

לכן, $\overrightarrow{W} \sim N(0, I_n)$ ובעלת פונקציית צפיפות מתאימה.