<u>שאלה 2 של תרגיל 13 (פתרון)</u>

יהיו : $A = \{p \in \mathbb{R}^2 | \, ||p|| \geq 2 \}$

ו- $T = \{p \in \mathbb{R}^2 | \, 1 \leq ||p|| \leq 2 \}$. אזי: $\mathbb{R}^2 = A \cup T \cup D^2$.

נסמן : $O \in \mathbb{R}^2$ - ראשית.

נגדיר $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ באופן הבא. יהיו (r_p, θ_p) – קואורדינטות קוטביות של הנקודה p. אזי נגדיר:

$$f(p) = \begin{cases} \left(\frac{r_p}{2}, \theta_p\right), & p \in A \\ \left(r_p - 1, \theta_p\right), & p \in T \\ O\,, & p \in D^2 \end{cases}$$

אם (x, y) קואורדינטות קרטזיות של p אז קל לעביר בטוים של $f|_A(p)$ ושל $f|_T(p)$ לקואורדינטות קרטזיות (גאומטריה אנליטחתת וקורסים אחרים): $f|_A(p) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$

$$f|_T(p) = \left(\frac{x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

כל רכיב של שתי הפונקציות הוא הרכבה של פונקציות רציפות ממשיות ופעולות אריתמטיות לכן הרכיבים האלה עצמם הם פונקציות רציפות ממשיות (ההרצאות). לפי המשפט על רכיבים רציפים פונקציות $f|_A$ ו-$f|_T$ רציפות.

הפונקציה $f|_{D^2}$ רציפה כקבועה. כוון ש-$\{A, T, D^2\}$ כיסי סגור סופי של $\mathbb{R}^2$ - <u>f –רציפה</u> (ההרצאות).

$f|_A(A) \supseteq (D^2)^c, f|_T(T) \supseteq D^2 \Leftarrow$ <u>f – על</u>.

נוכיח עכשיו ש-f סגורה.

תהי $F \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה. נסמן $F_1 = F \cap A$

ו- $F_2 = F \cap (T \cup D^2) = F \cap \overline{B(O,2)}$.

ברור ש-$F = F_1 \cup F_2$ ולכן $f(F) = f(F_1) \cup f(F_2)$.

F_2 חסומה וסגורה ולפי היינה –בורל ,קומפקטית.

לכן $f(F_2)$ קומפקטית. כוון ש-$\mathbb{R}^2$ האוסדורף <u>$f(F_2)$ - סגורה</u>.

נשאר להוכיח ש-<u>$f(F_1)$ סגורה</u>.

יהי $b \in \overline{f(F_1)}$. אזי קיימת סדרה $b_n \in f(F_1)$ כך ש-$b_n \to b$.

אזי b_n סדרת קושי: לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, k \geq n_0$

$d(b_m, b_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. ברור ש-$||b_n|| \geq 1$ כי $b_n \in f_A(A)$ ו-f_A

מקטינה אורך של ווקטור מ-A פי 2. נגדיר $a_n = 2b_n$.אז

$||a_n|| \geq 2$ ו- $f(a_n) = b_n$ ו-$a_n \in F_1$ לפי הגדרה f_A. מאותה

ההגדרה והתכונות גאומטריות של המישור:

$d(b_m, b_k) < \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow d(a_m, a_k) < \varepsilon$.

לכן גם a_n סדרת קושי. לכן קיים a כך ש- $a_n \to a$.

אזי $a \in F_1$ כי F_1 – סגורה. אזי $b_n = f(a_n) \to f(a)$ כי f

רציפה . לכן $b = f(a)$ כי הגבול סדרה ב- $\mathbb{R}^2$ יחידי. אז

הוכחנו שאם סדרה מתכנסת וכל איבריה מוכלים ב-$f(F_1)$ אז

גף גבולה מוכל ב-$f(F_1)$. לכן $f(F_1)$ סגורה.

מכאן $f(F) = f(F_1) \cup f(F_2)$ סגורה. אזי f סגורה.

אז יש לנו: (1) f- שהיא על, רציפה וסגורה. לכן (ההרצאה האחרונה) היא העתקת מנה. (2) אפשר לבדוק על ידי בדיקה ישירה ש-f מכבדת מאוד את ~. שתי העובדות גוררות שבייצוג הכנוני: $f = \hat{f} \circ \rho$: $\hat{f}$ – הומאומורפיזם.■