תירגול למורים בש תשפב סמסטר ב

15 ביוני 2022

חדוא

1. תשעז מועד א ב"ש שאלה 4ב. חשבו את

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n\cdot n!}=\frac{0!-1}{2^0\cdot 0!}+\frac{1!-1}{2^1\cdot 1!}+\frac{2!-1}{2^2\cdot 2!}+\frac{3!-1}{2^3\cdot 3!}+\cdots$$

$$=0+0+\frac{1}{8}+\frac{5}{48}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n\cdot n!}$$

נתחיל להגיד שהיה נחמד עם לא היה את ה -1 במונה כי אז היינו מקבלים

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n\cdot n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$$

אבל מה לעשות יש את -1 במונה ופשוט נטפל בו בנפרד במובן שנקח את הטור שלנו ונפצל אותו לשניים:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n\cdot n!}&=\frac{0!-1}{2^0\cdot 0!}+\frac{1!-1}{2^1\cdot 1!}+\frac{2!-1}{2^2\cdot 2!}+\frac{3!-1}{2^3\cdot 3!}+\cdots\\&=\left[\frac{0!}{2^0\cdot 0!}-\frac{1}{2^0\cdot 0!}\right]+\left[\frac{1!}{2^1\cdot 1!}-\frac{1}{2^1 1!}\right]+\cdots\\&=\left[\frac{0!}{2^0\cdot 0!}+\frac{1!}{2^1\cdot 1!}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{2^0\cdot 0!}+\frac{1}{2^1 1!}+\cdots\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n\cdot n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}\\&=2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}\end{aligned}$$

נשאר לחשב את

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

שזה בעצם הצבה של $x = \frac{1}{2}$ בטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} = e^{\frac{1}{2}}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$2 - e^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{e}$$

2. מבחן 035582 מועד קיץ 2021.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=1+ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a>1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. **(1)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר $x=\frac{\ell n(a)}{2}$.

מצא את שיעור ה־ y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x=0$, $y=\frac{1}{2}$.

פתרון: $f(x)=1+a\cdot e^{-2x}$

(א)

i. אסימו' מאונכות לצירים: אסימט' מהצורה $x=a$ אין כי $f(x)$ מוגדרת ורציפה בכל $\mathbb{R}$. נחשב את הגבולות ב $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} 1+a\cdot e^{-2x}=\left\{1+a\cdot e^{-\infty}\right\}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} 1+a\cdot e^{-2x}=\{1+ae^{\infty}\}\underbrace{=}_{a>1}\infty$$

אזי יש אסימפטוטה אופקית מימין שהיא $y=1$.

ii. תחומי עליה/ירידה: תחילה נגזור

$$f'(x)=a\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=-2a\cdot e^{-2x}<0$$

כי $a>1$ ולכן f יורדת בכל $\mathbb{R}$.

iii. נקודות חיתוך עם הצירים: עם ציר x - אין כמו שראינו ($f\geq 1$ כיון שיורדת בכל $\mathbb{R}$ ושואפת מימין ל 1). עם ציר y זה להציב $x=0$ ולקבל

$$f(0)=1+a$$

ולכן נקודת חיתוך $(0,1+a)$.

(ב)

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

i. תחום הגדרה: לכל x כיוון ש $f\neq 0$ לכל x. ובנוסף f מוגדרת בעצמה לכל x.

ii. אסימפטוטות: אין אסימ' מהצורה $x=a$ כיוון ש g מוגדרת ורציפה בכל $\mathbb{R}$. ולפי חישובים קודמים

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\left\{\frac{1}{1}\right\}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\left\{\frac{1}{\infty}\right\}=0$$

iii. נתון שב $x=\frac{\ln(a)}{2}$ יש ל g נקודת פיתול יחידה. מצאו את שיעור נקודה y וסרטטו סקיצה. נציב פשוט

$$g\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)}=\frac{1}{1+a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)}}=\frac{1}{1+a\cdot e^{-\ln(a)}}=\frac{1}{1+ae^{\ln(a^{-1})}}=$$

$$=\frac{1}{1+a\cdot a^{-1}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

סקיצה - כל אחד וכישורי הציור שלו..

(ג)

i. מצא את שיעורי הקיצון של $g'(x)$. בנקודת פיתול, תחת הנחה שהכל רציף כמו אצלנו, אז g'' מחליפה סימן בפיתול בנקודה עצמה שווה ל 0. לפי מה שראינו נקודת הפיתול מתקבלת ב

$$x=\frac{\ln(a)}{2}$$

ולכן $g''\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)=0$ ומשמאל לנקודה מתקיים $g''>0$ ומימין $g''<0$ (לפי הסקיצה, g עולה בכל $\mathbb{R}$ והיא בשמאל שואפת ל 0 ובימין שואפת ל1 ולכן היא מתחילה יותר "מחייכת" ואחכ יותר "עצובה") שזה אומר ש g' עולה עד ל $\frac{\ln(a)}{2}$ ויורדת משמה ולכן הנקודה $\frac{\ln(a)}{2}$ נקודת מקסימום של g' . בצורה פורמלית יותר:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{[f(x)]^2}\cdot f'(x)=-\frac{-2a\cdot e^{-2x}}{[1+a\cdot e^{-2x}]^2}=\frac{2a\cdot e^{-2x}}{[1+a\cdot e^{-2x}]^2}$$

ערך ה y של נקודת הקיצון (של g') הוא

$$g'\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)=\frac{2a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)}}{\left[1+a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)}\right]^2}=\frac{2a\cdot\frac{1}{a}}{\left[1+a\cdot\frac{1}{a}\right]^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

נציב נקודה $x=\frac{\ln(\frac{a}{2})}{2}$ שהיא משמאל ל $\frac{\ln(a)}{2}$ ונקבל

$$g'(0)=\frac{2a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(\frac{a}{2})}{2}\right)}}{\left[1+a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(\frac{a}{2})}{2}\right)}\right]^2}=\frac{2a\cdot\frac{2}{a}}{\left[1+a\cdot\frac{2}{a}\right]^2}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$$

נציב נקודה $x=\frac{\ln(2a)}{2}$ שהיא מימין ל $\frac{\ln(a)}{2}$ ונקבל

$$g'(0)=\frac{2a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(2a)}{2}\right)}}{\left[1+a\cdot e^{-2\left(\frac{\ln(2a)}{2}\right)}\right]^2}=\frac{2a\cdot\frac{1}{2a}}{\left[1+a\cdot\frac{1}{2a}\right]^2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$$

וקיבלנו ש $\frac{\ln(a)}{2}$ היא נקודת מקס' של g' (משמאלה ומימינה מקבלים ערכים נמוכים יותר).

ii. סקיצה של g'. ראינו ש $\left(\frac{\ln(a)}{2},\frac{1}{2}\right)$ היא נקודת מקס'. בנוסף, ראינו ש f יורדת בכל $\mathbb{R}$ ולכן $g=\frac{1}{f}$ עולה בכל $\mathbb{R}$ ולכן $g'\geq 0$ בכל $\mathbb{R}$. השאלה מה הגבולות של g' ב $\pm\infty$? אני טוען ששני הגבולות הללו הן 0. למה? כי הגבולות של g ב $\pm\infty$ הם סופיים (ראינו 1 ב ∞ ו 0 ב $-\infty$) ולכן השיפועים (הערכים של g') צריכים לשאוף לאפס.
אפשרות נוספת: לחשב ישירות את הגבולות של g' שחישבנו.

(ד) חשבו את השטח של g' שחסום בין הישרים $x=0$ ו $y=\frac{1}{2}$.
ראינו ש $\left(\frac{\ln(a)}{2},\frac{1}{2}\right)$ היא נקודת מקס' יחידה של g'.

$$\int_0^{\frac{\ln(a)}{2}}\left[\frac{1}{2}-g'(x)\right]\mathrm{dx}$$

כלומר, נחשוב על האינטגרל כשטח שכלוא בין הפונקציה הקבועה $y=\frac{1}{2}$ לבין $g'(x)$ בקטע $\left[0,\frac{\ln(a)}{2}\right]$.

$$\int_0^{\frac{\ln(a)}{2}}\left[\frac{1}{2}-g'(x)\right]\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{2}x-g(x)\right]_0^{\frac{\ln(a)}{2}}=$$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(a)}{2}-g\left(\frac{\ln(a)}{2}\right)\right]-\left[-g\left(0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(a)}{2}-\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{חישבנו קודם}}+\underbrace{\frac{1}{1+a}}_{g(0)}$$

3. מבחן 035582 מועד קיץ 2021.

5. א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ell n\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ell n(f(x))$.

היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א ועננה על התת־סעיפים (1)-(3) שלפניך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

ג. בעבור כל x המקיים $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ חיובית. נמק את קביעתך.

פתרון:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right)$$

(א)

i. תחום הגדרה: צריך לדאוג שהמכנה לא מתאפס ולכן צריך לדרוש $(x+2)(x-1) \neq 0$ וגם צריך לדרוש ש $\ln()$ מוגדר כלומר

$$\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right) > 0$$

הדרישה הראשונה אומר ש $x \neq -2, 1$ והדרישה השניה

$$\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right) > 0$$

שזה קורה אם $x+1, x+2 > 0$ או $x+1, x+2 < 0$. כלומר $x > -1$ או $x < -2$.

לסיכום: ($x > -1$ או $x < -2$) וגם ($x \neq 1$).

ii. אסימפו': אסימפטוטות מאונכות (לציר x) יכולות להתקבל ב $1, -1, -2$

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

כאשר השיוויון הראשון נכון, כיוון שבגבול $x \to 1$, לא אכפת מה הערך בנקודה $x = 1$ ולכן במקום $f(x)$ שאפשר להסתכל על $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ שנבדלת ממנה רק בערך ב $x = 1$ (וכמובן שהיתרון שלה שהיא רציפה ב $x = 1$ ולכן אפשר

להציב 1 בשביל להצדיק את השיוויון השני).

$$\lim_{x\to -1} \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right) = \lim_{x\to -1} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

כאשר $x\to(-1)^-$ אז הפונקציה כלל לא מוגדרת. וכאשר $x\to(-1)^+$ נקבל

$$\lim_{x\to(-1)^+} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \left\{\ln\left(\frac{0^+}{1}\right)\right\} = -\infty$$

ולסיום

$$\lim_{x\to -2} \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right) = \lim_{x\to -2} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

כאשר $x\to(-2)^+$ הפונקציה לא מוגדרת. וכאשר $x\to(-2)^-$ נקבל

$$\lim_{x\to(-2)^-} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \left\{\ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = \ln(\infty)\right\} = \infty$$

ולכן יש אסימפטוטה ב $x=-1$ (בצד ימין שלה שואפת ל $-\infty$) וב $x=-2$ (בצד שמאל שלה שואף ל ∞)
כעת, אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to(-\infty)} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln(1) = 0$$

כאשר השייויון האדום מנומק

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 1$$

יש לנו אסימפטוטה $y=0$ בשני הצדדים.

iii. תחומי עליה/ירידה: נגזור

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} =$$

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

ואז

x	-3	-2		-1	0	1	2
f'	$+$	UD	UD	UD	$+$	UD	$+$

ולכן הפונקציה עולה בתחום $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$, פרט ל $x=1$ שלא מוגדרת (כאשר כתבנו $(-1,\infty)$ ולא פיצלנו ל

$$(-1,1)\cup(1,\infty)$$

כיוון שב $x=1$ יש נקודת אי רציפות סליקה ו $f(x)$ מזדהה עם $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ בכל נקודה פרט ל $x=-1$)

(ב)

$$g(x) = \ln(f(x))$$

i. תחום הגדרה: איפה ש $f(x)$ מוגדרת וחיובית. לפי מה שחקרנו קודם, זה קורה עבור $x < -2$.

ii. תחום עליה/ירידה: נגזור

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ומכיוון ש f חיובית אז הסימן של g' שווה לסימן של f' וראינו שבתחום $x < -2$ הסימן הוא חיובי.לכן g עולה תמיד (בתחום הגדרתה).

iii. סקיצה: שואף ל ∞ משמאל ל -2, שואף ל $-\infty$ כאשר $x \to -\infty$ ועולה בתחום.

(ג) עבור x שמקיימים $0 < f(x) < 1$ מה הסימן של $f(x) \cdot g(x)$.
כמובן שהסימן של $f(x)$ הוא חיובי. הסימן של $g(x)$ שלילי כי $\ln$ הוא שלילי בקטע $(0, 1]$ ולכן המכפלה תהיה שלילית.