

תרגיל 10

1. יהא X אינסופי עם הטופולוגיה הדיסקרטית. הוכיחו כי X אינו קומפקטי.
2. הוכיחו כי l_∞ אינו קומפקטי (תזכורת $l_\infty = \{x : \sup |x_i| < \infty\}$). הדרכה: מצאו קבוצה סגורה שאינה קומפקטית.
3. הוכיחו כי $X = [0, 1]$ עם הטופולוגיה המשורית מסונגפריי אינו קומפקטי.
4. יהא X מ"ט, יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ מספר סופי של ת"מ קומפקטים. הוכיחו כי $\cup A_i$ קומפקטי גם כן.
5. תרגיל (קומפקטיפיקציית הנקודה): יהא X מרחב T_2 שאינו קומפקטי. נגדיר $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ כאשר ∞ איבר שלא ב X . נגדיר טופולוגיה τ על \hat{X} ע"י שנגדיר את הקבוצות הסגורות בו: הקבוצות הסגורות ב \hat{X} הן תתי הקבוצות הקומפקטיות של X והקבוצות מהצורה $S \cup \{\infty\}$ עבור S סגורה ב X .
 - (א) הוכיחו כי אכן τ טופולוגיה (היעזרו בעובדה כי כל קבוצה סגורה F ב \hat{X} מקיימת כי $F \setminus \{\infty\}$ קבוצה סגורה ב X).
 - (ב) הוכיחו כי X הוא תת מרחב של \hat{X} .
 - (ג) הוכיחו כי \hat{X} הוא קומפקטי.
 - (ד) הוכיחו כי X צפופה ב \hat{X} .
 - (ה) הוכיחו כי X קומפקטי מקומי אמ"מ \hat{X} הוא T_2 .
6. [בונוס]
 - (א) הוכיחו כי \mathbb{Q} אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי קומפקטיפיקציית הנקודה $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2 .
 - (ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כי כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.