<u>אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 2</u>

פתרון שאלה 1

הוכיחו שהגבול של הסדרה $a_n=\frac{2n-1}{3n}$ הוא: $\frac{2}{3}$

<u>הוכחה:</u>

יהי $\varepsilon>0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n}$

ולכן: $\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3n}<\varepsilon$

נבחר $n_0>\frac{1}{3\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n\ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n}\le\frac{1}{3n_0}<\varepsilon$$

פתרון שאלה 2

לכל אחד מהסדרות הבאות מצאו את הגבול והוכיחו לפי ההגדרה שאכן הסדרה מתכנסת לאותו גבול:

א. $$a_n=\frac{2n+(-1)^n}{n}$$

<u>פתרון:</u>

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+(-1)^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)=2$$

נוכיח לפי ההגדרה שזה אכן הגבול:

יהי $\varepsilon>0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right|<\varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right|=\left|\frac{2n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}-2\right|=\left|2+\frac{(-1)^n}{n}-2\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$

ולכן: $\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$

נבחר $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n\geq n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$$

ב. $a_n=\frac{5n}{n^2+3n+1}$

<u>פתרון:</u>

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2+3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\frac{0}{1}=0$$

נוכיח לפי ההגדרה שזה אכן הגבול:

יהי $\varepsilon>0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right|<\varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right|=\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}\right|<\left|\frac{5n}{n^2}\right|=\left|\frac{5}{n}\right|=\frac{5}{n}$

ולכן: $\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n}<\varepsilon$

נבחר $n_0>\frac{5}{\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n\geq n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right|<\frac{5}{n}\leq\frac{5}{n_0}<\varepsilon$$

ג. $a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$

<u>פתרון:</u>

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\frac{1}{1}=1$$

נוכיח לפי ההגדרה שזה אכן הגבול:

יהי $\varepsilon>0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right|<\varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right|<\left|\frac{n^2-1}{n^2}-1\right|=\left|\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}-1\right|=\left|1-\frac{1}{n^2}-1\right|=\frac{1}{n^2}$

ולכן: $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right|<\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<n$

נבחר $n_0>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ואכן יתקיים כי לכל $n\ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right|<\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{{n_0}^2}<\varepsilon$$