אתר הקורס: www.math-wiki.com
ספרים מומלצים:

- J.E. Marsdem, A.J. Trouba, Vector Calculuus
- C.E. Edwards, Advanced calculus of several variables
- S.H. Weintraub, Differential forms

שדה וקטורי

פונקציה וקטורית

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

$$f=(f_1,...f_m)$$

$$f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

דוגמה - מימד 2

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

דוגמה מפיסיקה - גרוויטציה

$$F=-\frac{mMG}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{r}=(x,y,z)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{mMG}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}x,-\frac{mMG}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}y,-\frac{mMG}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}z\right)$$

ניקח את השדה $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ניקח פונקציה

$$(f_1, ...f_m) = f : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$$f_i \in C^k(\Omega)$$

$$f \in \left(C^k(\Omega)\right)^m$$

- הפונקציות f_i נקראות "שדות סקלרים", ו$C^k(\Omega)$ קבוצת הפונקציות הסקלריות מΩ הגזירות k פעמים.
- הפונקציה f נקראת "שדה וקטורי", ו$\left(C^k(\Omega)\right)^m$ קבוצת הפונקציות הוקטוריות מΩ הגזירות k פעמים.

דיפרנציאביליות

$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב$x_0 \in \Omega$ אם

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(h) + r(h)$$

כאשר

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

גראדיאנט

$$\varphi'(x_0)(h) = \mathrm{grad} f(x_0) \cdot h$$

($\mathrm{grad} f(x_0)$ וקטור, h וקטור, $\mathrm{grad} f(x_0) \cdot h$ מכפלה סקלרית)

$$\mathrm{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

$$\mathrm{grad} : C^k(\Omega) \to \left(C^{k-1}(\Omega)\right)^n$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית בx_0 אם

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + r(h), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

$$f'(x_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

המטריצה נקראת "מטריצת יעקובי". הדטרמיננטה שלה נקראת "יעבוקיאן".

הגדרה

יהי $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי דיפרנציאבילי.
הדיברגנץ של f מוגדר על ידי

$$\mathrm{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)$$

$$\mathrm{div} : \left(C^k(\Omega)\right)^n \to C^{k-1}(\Omega)$$

(זה בעצם העקבה(trace) של מטריצת יעקובי)

הגדרה

יהי $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, שדה וקטורי דיפרנציאבילי. הקרל(curl) הוא וקטור המוגדר על ידי

$$\mathrm{curl} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{curl} : \left(C^k(\Omega)\right)^3 \to \left(C^{k-1}(\Omega)\right)^3$$

הערות

- i,j,k וקטורים - $i=(1,0,0)\,, j=(0,1,0)\,, k=(0,0,1)$
- בספרים מסויימים קוראים לזה roter ומסמנים $\mathrm{rot} f$ במקום $\mathrm{curl} f$

הגדרה - נבלה

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

(כלומר וקטור של פעולות נגזרת)
עכשיו אפשר לכתוב:

- $\text{grad}f = f\nabla$ - הפעלה של ∇ על f
- $\text{div}f = \nabla \cdot f$ - מכפלה סקלרית של ∇ וf
- $\text{curl}f = \nabla \times f$ - מכפלה וקטורית של ∇ וf

זהויות

$$f, g \in \left(C^1(\Omega)\right)^n, \varphi, \psi \in C^1(\Omega)$$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \psi\text{grad}\varphi + \varphi\text{grad}\psi$$

$$\text{grad}(fg) = gJf + fJg$$

(Jf מטריצת יעקובי של f, Jg מטריצת יעקובי של g)

$$\text{div}(\varphi f) = (\text{grad}\varphi) \cdot f + \varphi\text{div}f$$

$$\text{div}(f \times g) = g \cdot \text{curl}f - f \cdot \text{curl}g$$

$$\text{curl}(\varphi f) = (\text{grad}\varphi) \times f + \varphi\text{curl}f$$

$$\text{curl}(f \times g) = f\text{div}g - g\text{div}f + gJf - fJg$$

ההוכחות לזה ארוכות אבל טריוויאליות. נראה לדוגמה את $\text{div}(f \times g) = g \cdot \text{curl}f - f \cdot \text{curl}g$ (באינטואיציה, לא הוכחה פורמלית):

$$\nabla\cdot(f \times g) = \nabla\cdot\left(\overset{\downarrow}{f} \times g\right) + \nabla\cdot\left(f \times \overset{\downarrow}{g}\right) = g\cdot(\nabla \times f) + f\cdot(g \times \nabla) = g\cdot\text{curl}f - f\cdot\text{curl}g$$

(הערה: $\overset{\downarrow}{f}$ אומר שביצענו פעולה כמו נגזרת על f)

למה

1. יהי $\varphi \in C^2(\Omega)$ שדה סקלרי, כאשר $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. אזי $\text{curl}(\text{grad}\varphi) = 0$.($\nabla \times (\varphi\nabla) = \varphi(\nabla \times \nabla) = 0$)
2. יהי $f \in \left(C^2(\Omega)\right)^3$ שדה וקטורי, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. אזי $\text{div}(\text{curl}f) = 0$.

הוכחה(של 1)

$$\text{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$$

$$\text{curl}\left(\text{grad}\varphi\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right), 0, 0\right) = 0$$

הגדרה - אופרטור לפלס

אופרטור לפלס $\Delta : C^k\left(\Omega\right) \to C^{k-2}\left(\Omega\right)$ מוגדר על ידי

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \text{div}\left(\text{grad}\varphi\right) = \text{div}\left(\text{grad}\varphi\right)$$

$$\Delta = \nabla^2$$

נקרא גם לפלסיאן.
ניתן גם להגדיר אותו כאופרטור וקטורי:

$$\Delta : \left(C^k\left(\Omega\right)\right)^n \to \left(C^{k-2}\left(\Omega\right)\right)^n$$

$$\Delta f = \left(\Delta f_1, ...\Delta f_n\right)$$

ב$\mathbb{R}^3$:

$$\Delta f - \text{grad div}f + \text{curl curl}f = 0$$

$$\text{curl curl}f = \nabla x\left(\nabla x f\right) = \nabla\left(\nabla \cdot f\right) - f\left(\nabla \cdot \nabla\right) = \text{grad}\left(\text{div}f\right) - \nabla f$$

תלות במערכת צירים

כל ההגדרות מבוססות על מערכת הצירים. אנחנו רוצים להראות שהן בעצם לא תלויות במערכת צירים.

גם למושגים שמוגדרים לפי מערכת צירים, לפעמים ניתן לתת הגדרה שאינה תלויה במערכת צירים. למשל, מכפלה סקלרית מוגדרת בתור $v_1u_1 + ... + v_nu_n$, אבל אפשר להגדיר אותה גם ללא תלות במערכת צירים, בתור $|u|\,|v|\cos\angle\left(u,v\right)$.

נרצה לתת הגדרות שלא תלויות במערכת גם למושגים שהגדרנו כאן.

אפשרות אחרת היא להראות שהערכים לא משתנים כאשר עוברים בסיס.

העברת בסיס

$$i = (1,0,0) \qquad j = (0,1,0) \qquad k = (0,0,1)$$

נעביר אותם לבסיס אחר:

$$i' = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \qquad j' = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \qquad k' = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

תהי $p \in \mathbb{R}^3$ נקודה.

$$p = xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k'$$

נרצה להראות את הקשר בין (x, y, z) ל(x', y', z'). נשים לב לכך ש:

$$i' = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \qquad j' = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \qquad k' = a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k$$

לכן ניתן לכתוב:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z'$$

$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z'$$

$$z = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'$$

כלומר:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

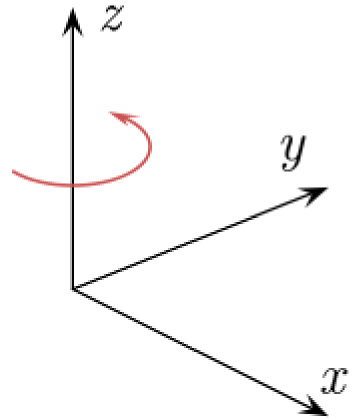
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

כלומר, ההמרה מתבצעת באמצעות מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

המטריצה A היא אורתוגונלית - $A^t = A^{-1}$. זה אומר גם ש$\det A = \pm 1$.

מערכת הצירים נקבעת לפי כלל יד ימין, שאומר שכציר הz הוא כלפי מעלה, הסיבוב הקצר בין כיוון ציר הy לכיוון ציר הx הוא מימין לשמאל - כלומר נגד כיוון השעון.



אם המערכת הישנה נקבעת לפי כלל יד ימין, והחדשה לפי כלל יד שמאל, מקבלים $\det A = -1$. אם שתיהן נקבעות לפי כלל יד ימין $\det A = 1$.

עכשיו, נגדיר:

$$f\left(p\right)=F\left(x,y,z\right)=G\left(x',y',z'\right)$$

הפונקציות F,G תלויות במערכת צירים, אבל הפונקציה f לא תלויה במערכת צירים.
נרצה להראות שהגרדיינט לא תלוי במערכת צירים:

$$\mathrm{grad}F\left(x,y,z\right)=\mathrm{grad}G\left(x',y',z'\right)$$

נחשב:

$$G\left(x',y',z'\right)=F\left(a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z',a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z',a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x'}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot a_{11}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot a_{12}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot a_{13}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y'}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot a_{21}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot a_{22}+\frac{\partial F}{\partial z}a_{23}$$
$$\frac{\partial G}{\partial z'}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot a_{31}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot a_{32}+\frac{\partial F}{\partial z}a_{33}$$

קיבלנו ש$\mathrm{grad}G\left(x',y',z'\right)=A\mathrm{grad}F\left(x,y,z\right)$ - כלומר הגרדיינט של F והגדיינט של G הם אותו שדה וקטורי במערכת צירים אחרת.

מסקנה

הגרדיינט לא תלוי במערכת צירים.