תרגיל בית 5 באלגברה מופשטת
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. תהי D_4 החבורה הדיהדרלית מסדר 8. תארו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות שלה, והוכיחו שכולן אבליות. האם כולן ציקליות?

שאלה 2. נגדיר את המֶרְכָּז של חבורה G להיות

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב-G שמתחלפים עם כל איברי G.

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \lhd G$.

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4)$.

ג. הוכיחו $Z(D_{2n+1}) = \{e\}$ וכי $Z(D_{2n}) = \langle \sigma^n \rangle$ עבור $n > 1$. רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה הדיהדרלית?

שאלה 3. בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה G ותת־חבורה $H \leq G$ המקיימות את התנאים. רמז: אפשר להעזר בשאלה הקודמת.

א. הכלה ממש $Z(H) \subset Z(G)$.

ב. הכלה ממש $Z(G) \subset Z(H)$.

ג. $Z(G)$ לא מכיל את $Z(H)$ ולא מוכל בו.

שאלה 4. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת־חבורה $H \leq G$. תארו את G/H, אוסף המחלקות השמאליות של H ב-G.

א. $G = U_{10}$, $H = \langle 9 \rangle$.

ב. $G = G_1 \times G_2$, $H = \{e_1\} \times G_2$ כאשר e_1 הוא איבר היחידה של G_1.

ג. $G = D_6$, $H = \langle \sigma^2 \rangle$ כאשר σ היא האיבר שמקביל לסיבוב ב-$60°$ מעלות.

ד. $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^* : x > 0\}$.

שאלה 5 (אתגר)**.** תהינה $\sigma, \tau \in S_n$ תמורות כך שמתקיים $\sigma = \tau^2$. במקרה זה נאמר כי τ היא שורש של σ. מצאו תנאי מספיק והכרחי שקובע האם לתמורה נתונה $\sigma \in S_n$ יש שורש. אם קיים שורש, איך אפשר לחשב אותו מפורשות?

שאלה 6 (אתגר)**.** צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.
רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.

בהצלחה!